Prof. Dr. M. Grohe E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt Weihnachten

Abgabetermin: Mittwoch, der 11. Januar 2023 um 14:30

- Die Abgabe dieses Blattes wird am Mittwoch, dem 21.12. um 16 Uhr freigeschaltet.
- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online via Moodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer des Tutoriums**, **Nummer des Übungsblattes** und **Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert. Als Dateiname bitte Blatt-XX_Tutorium-YY_Gruppe-ZZZ.pdf mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen verwenden.
- Musterlösungen zu den Hausaufgaben werden nach der Globalübung am Mittwoch, dem 11.01. in Moodle hochgeladen.
- **Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind Bonusaufgaben**; in den ersten beiden Aufgaben können Bonuspunkte für den ersten Zulassungsteil erworben werden, in den letzten beiden Aufgbaen können Bonuspunkte für den zweiten Zulassungsteil erworben werden.

Aufgabe 1 — 5* Punkte

Es ist kurz vor Weihnachten, und die Wichtel sind auf dem Weg zum Nordpol, um auch dieses Jahr wieder fleissig Geschenke für die Kinder der Welt zu produzieren. Leider ist ihr Zug jedoch im Schnee steckengeblieben, und sie entschliessen sich, ein paar Übungsaufgaben für ihre BuK-Klausur zu machen...

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass folgende Sprachen unentscheidbar sind, oder begründen sie, warum der Satz von Rice nicht anwendbar ist.

a) $L_1 = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf } w \text{ nach höchstens } |w| \text{ Schritten}\}$

b) $L_2 = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \text{ besteht aus ungerade vielen Symbolen}\}$

c) $L_3 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ erkennt } H_\varepsilon\}$

d) $L_4 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ erkennt } \overline{H_\varepsilon}\}$

Aufgabe 2 5* Punkte

Im Weihnachtsdorf angekommen machen sich die Wichtel sogleich an die Arbeit. Dieses Jahr haben sich alle Kinder die Lernbox "Berechenbarkeit" gewünscht, und jeder dieser Boxen soll eine magische Turingmaschine (MTM) beigelegt werden. Damit die Boxen aber nicht alle gleich sind, soll die Box jeder Turingmaschine eine andere Funktion berechnen.

Nach einiger Zeit stellen die QA-Wichtel jedoch fest, dass es einen Fehler in der Produktion gab und manche Boxen magische Turingmaschinen enthalten, welche die gleiche Funktion berechnen. Da sie unmöglich alle bereits produzierten magischen Turingmaschinen von Hand prüfen können, wollen sie die Prüfung automatisieren und wiederum von einer Turingmaschine durchführen lassen...

Wir betrachten die folgende Sprache:

$$L = \{\langle M\rangle\langle M'\rangle \mid M \text{ und } M' \text{ berechnen die gleiche Funktion}\}$$

a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass L entscheidbar ist.

b) Geben Sie für L und $\overline{L}$ an, ob sie semi-entscheidbar sind. Beweisen Sie ihre Behauptungen.

Aufgabe 3 5* Punkte

Munter haben die Wichtel trotz der Rückschläge Geschenke produziert. Heute gönnen sie sich eine Pause, und geraten ins Gespräch über Komplexitätstheorie...

a) Zeigen Sie: P ist abgeschlossen unter Komplementbildung, d.h. wenn $L \in \mathsf{P}$ gilt, dann auch $\overline{L} \in \mathsf{P}$.

b) Wir definieren $\mathsf{coNP} = \{\overline{L} \mid L \in \mathsf{NP}\}$, die Klasse der Komplemente aller Sprachen, welche in NP liegen. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ gilt, dann gilt $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.

c) Zeigen Sie: Eine Sprache L ist genau dann NP-vollständig, wenn $\overline{L}$ coNP-vollständig ist.

Aufgabe 4 **5* Punkte**

Die Wichtel beraten, was sie mit den bereits hergestellten magischen Turingmaschinen anstellen sollen. Ihnen kommt die Idee, dass sie die Lernboxen mit den MTMs einfach an Kinder verschenken, welche einander nicht kennen. Dazu konstruieren sie einen "Bekanntheitsgraphen", dessen Knoten die Kinder repräsentieren und welcher eine Kante vw besitzt, wenn die Kinder v und w einander kennen.

> MTM-Verteilung
>
> **Eingabe:** Ein "Bekanntheitsgraph" G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
>
> **Frage:** Existiert eine Menge von mindestens k Kindern, welche einander paarweise nicht kennen?

Zeigen Sie, dass MTM-Verteilung NP-vollständig ist.