Prof. Dr. M. Grohe

E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt 1

Abgabetermin: Mittwoch, der 26. Oktober 2022 um 14:30

- Wählen Sie in Moodle eine Abgabegruppe (im Tab des Tutoriums) bis **Montag, den 24. Oktober um 15:00 Uhr**. Erst nach dieser Frist wird die Upload-Funktion für die Abgabe von Blatt 1 freigeschaltet.
- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online via Moodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden. Suchen Sie sich ggf. beim ersten Termin Ihres Tutoriums Abgabeparter*innen.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer des Tutoriums**, **Nummer des Übungsblattes** und **Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert. Als Dateiname bitte Blatt-XX_Tutorium-YY_Gruppe-ZZZ.pdf mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen verwenden.
- Musterlösungen zu den Hausaufgaben werden nach der Globalübung in Moodle hochgeladen.

Tutoriumsaufgabe 1 (Kodierung)

Geben Sie formale Definitionen für die Sprachen der folgenden Entscheidungsprobleme an. Machen Sie sich dabei insbesondere Gedanken zur Kodierung der Eingabe und zum Eingabealphabet.

a) Eine *Clique* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $K \subseteq V$ von paarweise benachbarten Knoten. Die Sprache des Cliquenproblems L_{Clique} enthält die Kodierungen aller Paare (G, b) mit $b \in \mathbb{N}$, so dass G eine Clique der Größe mindestens b besitzt.

b) Das Teilsummenproblem besteht darin, für eine gegebene Multimenge A (also eine Menge, welche Elemente mehrfach enthalten kann) von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl b zu entscheiden, ob es eine Teilmultimenge X von A gibt, sodass die Summe der Elemente von X genau b ist. Die Sprache $L_{\text{Teilsumme}}$ enthält die Kodierungen der Paare (M, b) mit dieser Eigenschaft.

c) Ein *Hamiltonpfad* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Pfad, welcher jeden Knoten von G genau einmal besucht. Die Sprache des Hamiltonpfad-Problems L_{HP} enthält die Kodierungen aller Graphen G, so dass G einen Hamiltonpfad besitzt.

Tutoriumsaufgabe 2 (Konfigurationen)

Wir betrachten die Turingmaschine $M = (\{q_0, q_1, \bar{q}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_0, \bar{q}, \delta)$, wobei δ durch

δ	0	1	B
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	(q_1, B, L)
q_1	$(\bar{q}, 0, R)$	$(q_1, 1, L)$	(q_0, B, R)

gegeben ist. Geben Sie die Konfigurationsfolge von M auf der Eingabe $w = 110$ an.

Tutoriumsaufgabe 3 (Turingmaschine)

Geben Sie formal eine Turingmaschine M mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an, welche für eine sich auf dem Eingabeband befindliche Binärzahl $\text{bin}(n) \in \Sigma^*$ die Binärzahl $\text{bin}(n+2)$ berechnet. Auf der leeren Eingabe ε soll M ebenfalls ε ausgeben; auf nicht-leeren Eingaben, welche keine Binärzahlen sind, darf M sich beliebig verhalten.

Beschreiben Sie kurz die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine.

Aufgabe 4 (Kodierung) 6 (3 + 3) Punkte

Geben Sie formale Definitionen für die Sprachen der folgenden Entscheidungsprobleme an. Machen Sie sich dabei insbesondere Gedanken zur Kodierung der Eingabe und zum Eingabealphabet.

a) Ein Graph $G = (V, E)$ ist *k-färbbar*, falls es möglich ist, allen Knoten von G je eine von k Farben zuzuordnen, so dass keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe erhalten. Das Färbbarkeitsproblem besteht darin, für einen gegebenen Graphen G und eine natürliche Zahl k zu entscheiden, ob G k-färbbar ist. Die Sprache des Färbbarkeitsproblems $L_{\text{Färben}}$ enthält die Kodierung aller Paare (G, k) mit dieser Eigenschaft.

b) Das Partition-Into-Three-Sets-Problem besteht darin, zu entscheiden, ob eine gegebene Multimenge A (also eine Menge, welche Elemente mehrfach enthalten kann) von natürlichen Zahlen so in drei Teilmultimengen X, Y und Z von A partitioniert werden kann, dass die Summen der Elemente aus X, Y und Z gleich sind. Die Sprache L_{P3} enthält die Kodierung aller Multimengen, welche sich wie beschrieben partitionieren lassen.

Aufgabe 5 (Berechnete Funktion) 5 (4 + 1) Punkte

Wir betrachten die Turingmaschine $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \bar{q}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_0, \bar{q}, \delta)$, wobei δ durch

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	$(\bar{q}, 0, N)$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	(q_4, B, L)
q_2	$(q_2, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	(q_3, B, L)
q_3	accept	reject	accept
q_4	reject	accept	accept

gegeben ist.

a) Beschreiben Sie informell die Funktionsweise von M.

b) Geben Sie die von M berechnete Funktion an.

Aufgabe 6 (Turingmaschine) 4 Punkte

Konstruieren Sie eine Turingmaschine $M = (\{q_0, q_1, \bar{q}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_0, \bar{q}, \delta)$, welche auf der leeren Eingabe ε terminiert und möglichst viele Einsen, aber keine Nullen ausgibt. Auf allen anderen Eingaben darf M sich beliebig verhalten.

Geben Sie die Konfigurationsfolge ihrer Turingmaschine M auf der leeren Eingabe ε an.

Hinweis: Die maximal erreichbare Anzahl an Einsen ist 4.