Prof. Dr. M. Grohe E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, der 2. November 2022 um 14:30

- Die Abgabe dieses Blattes wird am Mittwoch, dem 26.10. um 16 Uhr freigeschaltet.
- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online via Moodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer des Tutoriums**, **Nummer des Übungsblattes** und **Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert. Als Dateiname bitte Blatt-XX_Tutorium-YY_Gruppe-ZZZ.pdf mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen verwenden.
- Musterlösungen zu den Hausaufgaben werden nach der Globalübung am Mittwoch, dem 02.11. in Moodle hochgeladen.

Tutoriumsaufgabe 1 (Gödelnummer)

a) Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_1, q_2, \delta)$ mit δ wie folgt:

	0	1	B
q_1	$(q_3, 1, N)$	$(q_1, 0, R)$	(q_2, B, L)
q_3	$(q_1, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_1, B, R)

Berechnen Sie die Gödelnummer $\langle M \rangle$ von M wie in der Vorlesung definiert.

b) Erinnern Sie sich daran, dass eine Gödelnummer eine eindeutige präfixfreie Kodierung ist, die einer Turingmaschine M ein Wort $\langle M \rangle$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$ zuordnet. Die Kodierung des t-ten Übergangs bezeichnen wir mit $\mathrm{code}(t)$. Wir betrachten eine TM M mit s Übergängen.

Welche der folgenden Kodierungen ist eine Gödelnummer?

(i)
- $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_\ell, D_m)$ kodiert als $1^i 0 1^j 0 1^k 0 1^\ell 0 1^m$.
- $\langle M \rangle = 000\,\mathrm{code}(1)\,00\,\mathrm{code}(2)\,00 \ldots 00\,\mathrm{code}(s)\,000$.

(ii)
- $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_\ell, D_m)$ kodiert als $\mathrm{bin}(i) 1\, \mathrm{bin}(j) 1\, \mathrm{bin}(k) 1\, \mathrm{bin}(\ell) 1\, \mathrm{bin}(m)$.
- $\langle M \rangle = 111\,\mathrm{code}(1)\,11\,\mathrm{code}(2)\,11 \ldots 11\,\mathrm{code}(s)\,111$.

(iii)
- $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_\ell, D_m)$ kodiert als $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^\ell 1 0^m$.
- $\langle M \rangle = 11\,\mathrm{code}(1)\,1\,\mathrm{code}(2)\,1 \ldots 1\,\mathrm{code}(s)\,1$.

Tutoriumsaufgabe 2 (Palindrome mit 1-Band-TM)

Für ein Wort $w = w_1 w_2 \dots w_n$ mit $w_i \in \Sigma$ bezeichnen wir mit $w^{-1} = w_n w_{n-1} \dots w_1$ die "Spiegelung" von w. Sei nun $L = \{ww^{-1} \mid w \in \Sigma^*\}$ die Sprache der Palindrome gerader Länge über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

Beschreiben Sie (in Worten) eine möglichst effiziente 1-Band-TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und den Speicherplatzbedarf der von Ihnen entworfenen Maschine.

Tutoriumsaufgabe 3 (RAM für den Zweierlogarithmus)

Geben Sie ein RAM-Programm zur Berechnung des Zweierlogarithmus $\lfloor \log_2 n \rfloor$ für eine Eingabe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ an.

Aufgabe 4 (Palindrome mit 2-Band-TM) — 4 Punkte

Für ein Wort $w = w_1 w_2 \dots w_n$ mit $w_i \in \Sigma$ bezeichnen wir mit $w^{-1} = w_n w_{n-1} \dots w_1$ die "Spiegelung" von w. Sei nun $L = \{ww^{-1} \mid w \in \Sigma^*\}$ die Sprache der Palindrome gerader Länge über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

Beschreiben (in Worten) Sie eine möglichst effiziente 2-Band-TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und den Speicherplatzbedarf der von Ihnen entworfenen Maschine.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wie ein zweites Band die Erkennung eines Wortes in L schneller machen kann.

Aufgabe 5 (Einseitig beschränktes Band) — 5 Punkte

Eine TM mit einseitig beschränktem Band ist eine 1-Band-TM, die die Positionen $p < 0$ nie benutzt (und mit dem Kopf auf Position 1) startet. Zeigen Sie, dass jede 1-Band-TM M durch eine 1-Band-TM M' mit einseitig beschränktem Band simuliert werden kann. Sie müssen nur das Akzeptanzverhalten der simulierten TM M übernehmen, dass heißt es ist nur das erste Zeichen der Ausgabe relevant. Geben Sie eine möglichst effiziente Simulation.

Geben Sie den Zeitverlust ihrer Simulation an, d.h. falls die simulierte TM M $t(n)$ Schritte läuft, wie viele Schritte benötigt ihre Simulation M' (asymptotisch) abhängig von $t(n)$?

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst wie die Turingmaschine erkennen kann dass das Ende des Bandes erreicht ist.

Aufgabe 6 (RAM-Programm für gewünschte Laufzeit) 6 Punkte

Geben Sie ein kurzes RAM-Programm an, welches für eine Eingabe $m \in \mathbb{N}_{>0}$ in Register 1 mit n Bits im *uniformen Kostenmaß* eine Laufzeit von $\Theta(\sqrt{2^n})$ hat (die Ausgabe spielt keine Rolle). Geben Sie auch die Laufzeit im *logarithmischen Kostenmaß* an. Erläutern Sie die Funktionsweise des RAM-Programms und zeigen Sie, dass ihr RAM-Programm die gewünschte Laufzeit hat.