Prof. Dr. M. Grohe E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt 3

Abgabetermin: Mittwoch, der 9. November 2022 um 14:30

- Die Abgabe dieses Blattes wird am Mittwoch, dem 02.11. um 16 Uhr freigeschaltet.
- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online via Moodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer des Tutoriums**, **Nummer des Übungsblattes** und **Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert. Als Dateiname bitte Blatt-XX_Tutorium-YY_Gruppe-ZZZ.pdf mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen verwenden.
- Musterlösungen zu den Hausaufgaben werden nach der Globalübung am Mittwoch, dem 09.11. in Moodle hochgeladen.

Tutoriumsaufgabe 1 ((Un-)Entscheidbarkeit)

Formulieren Sie folgende Probleme als Sprache (z.B. $H = \{\langle M\rangle w \mid M \text{ hält auf } w\}$ für das Halteproblem). Zeigen oder widerlegen Sie, welche der folgende Probleme entscheidbar sind.

a) Eingabe: Eine TM M.

Frage: Stoppt M auf keiner Eingabe?

b) Eingabe: Eine TM M; ein Wort w.

Frage: Schreibt M auf der Eingabe w jemals ein Nicht-Blank-Symbol auf das Band?

c) Eingabe: Eine TM M.

Frage: Verwirft M die Eingabe 110?

Tutoriumsaufgabe 2 (Diagonalisierung)

Sei

$$L = \{1^k \mid k \in \mathbb{N}, M_k \text{ akzeptiert } 1^k \text{ nicht}\}.$$

Zeigen Sie durch Diagonalisierung, dass L nicht entscheidbar ist.

Tutoriumsaufgabe 3 (Mächtigkeiten von Mengen)

Was sind die Mächtigkeiten der nachfolgenden Mengen? Unterscheiden Sie insbesondere zwischen abzählbaren und überabzählbaren Mengen. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Ergebnisse.

a) $M_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ Turingmaschine}\}$

b) $M_2 = \{L \subseteq \{0,1\}^* \mid L \text{ ist unentscheidbar}\}$

c) $M_3 = \{L \subseteq \{0,1\}^* \mid L \text{ ist endlich}\}$

d) $M_4 = \{M \mid M \text{ Turingmaschine}\}$

Aufgabe 4 (Abzählbare Vereinigung) 3 Punkte

Sei

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$$

die Menge der endlichen Tupel über $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}^*$ abzählbar ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\mathbb{N}^0$ das leere Tupel $()$ enthält.

Aufgabe 5 ((Un-)Entscheidbarkeit) 6 (3 + 3) Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen entscheidbar sind.

a) $L_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert genau 42 Wörter}\}$

b) $L_2 = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ bewegt auf der Eingabe } w \text{ den Kopf nie nach links}\}$

Aufgabe 6 (Diagonalisierung) **6 (2 + 1 + 3) Punkte**

Zur Erinnerung: Ein *deterministischer endlicher Automat* (DFA) ist ein 5-Tupel

$$A = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta).$$

a) Entwerfen Sie eine eindeutige, präfixfreie Kodierung (DFA-Gödelnummer), welche jedem DFA A ein Wort $\langle A \rangle$ über dem Alphabet $\{0,1\}^*$ zuordnet. Sie brauchen nicht zu zeigen, dass ihre Kodierung die gewünschten Eigenschaften besitzt.

b) Folgern Sie, dass die Menge $\{\langle A \rangle \mid A \text{ ist ein DFA über } \{0,1\}\}$ abzählbar ist.

c) Zeigen Sie mittels Diagonalisierung, dass die Sprache

$$L = \{\langle A \rangle \mid A \text{ ist ein DFA und } \langle A \rangle \notin L(A)\}$$

nicht regulär ist.

Hinweis: Die Definitionen von DFAs und regulären Sprachen finden Sie in den zur Verfügung gestellten Materialien der Vorlesung "Formale Systeme, Automaten, Prozesse".