

Übungsblatt 6

Abgabetermin: Mittwoch, der 30. November 2022 um 14:30

- Die Abgabe dieses Blattes wird am Mittwoch, dem 23.11. um 16 Uhr freigeschaltet.
- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online via Moodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer des Tutoriums, Nummer des Übungsblattes und Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben.
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert. Als Dateiname bitte Blatt-XX_Tutorium-YY_Gruppe-ZZZ.pdf mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen verwenden.
- Musterlösungen zu den Hausaufgaben werden nach der Globalübung am Mittwoch, dem 30.11. in Moodle hochgeladen.
- **Die Globalübung am 30.11. findet abweichend im Hörsaal I (1010|101) im Hauptgebäude statt.**

Tutoriumsaufgabe 1 (Charakteristische Funktion)

Sei L eine Sprache über dem Alphabet Σ . Die *charakteristische Funktion* von L ist die totale Funktion $\chi_L: \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\chi_L(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in L \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Die *semi-charakteristische Funktion* von L ist die partielle Funktion $\psi_L: \Sigma^* \rightarrow \{1\}$ mit

$$\psi_L(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in L \\ \perp, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- χ_L ist berechenbar genau dann, wenn L entscheidbar ist.
- ψ_L ist berechenbar genau dann, wenn L semi-entscheidbar ist.

Tutoriumsaufgabe 2 (PKP-Varianten)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Varianten des PKP entscheidbar sind:

- a) Das PKP über dem unären Alphabet $\{a\}$.
- b) Das PKP über dem binären Alphabet $\{a, b\}$.

Tutoriumsaufgabe 3 (WHILE-Programmierung)

Implementieren sie die folgenden Funktionen und Befehle als WHILE-Programme. Erklären Sie die Funktionsweise Ihrer Programme.

- a) Das Gleichheitsprädikat

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_1 = x_2 \\ 0, & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

- b) Den Befehl IF $x_i = c$ THEN P END, wobei $c \in \mathbb{N}$ eine Konstante ist und P ein WHILE-Programm ist (siehe Seite 321 der Vorlesung 11).

Tutoriumsaufgabe 4 (Semi-Entscheidbarkeit)

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils an, ob sie entscheidbar sind. Geben Sie ausserdem an, ob die Sprachen oder ihre Komplemente semi-entscheidbar sind. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

- a) $L_1 = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ erreicht auf der Eingabe } w \text{ nie den Zustand } q_7\}$
- b) $L_2 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ gibt auf jeder Eingabe 1010 aus}\}$

Aufgabe 5 (PKP auf Monoiden)**4 (2 + 2) Punkte**

Ein *Monoid* (M, \cdot, e) ist eine algebraische Struktur bestehend aus

- einer Menge M ,
- einer zweistelligen, assoziativen Verknüpfung $\circ: M \times M \rightarrow M$,
- einem neutralen Element $e \in M$.

Für ein gegebenes Monoid $\mathcal{M} = (M, \circ, e)$ definieren wir die PKP-Variante $\text{PKP}(\mathcal{M})$, dessen Dominos mit Elementen von M beschrieben sind. Eine Folge von k Dominos mit den Aufschriften x_1, \dots, x_k oben und den Aufschriften y_1, \dots, y_k unten ist korrespondierend, falls

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_k = y_1 \circ y_2 \circ \dots \circ y_k$$

gilt. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\text{PKP}(\mathcal{M})$ für die folgenden Monoide entscheidbar ist:

- a) $(\mathbb{N}, +, 0)$, das additive Monoid über den natürlichen Zahlen.
- b) (S_n, \circ, id) , wobei S_n die Menge aller Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$ und \circ die Funktionskomposition ist.

Aufgabe 6 (WHILE-Programmierung)**5 Punkte**

Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches die Funktion

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

berechnet. Erklären Sie die Funktionsweise Ihres Programms.

Hinweis: Sie können den Befehl $x_i := \llbracket x_j = x_k \rrbracket$ für beliebige Variablen x_i, x_j, x_k verwenden, der mit den Lösungen der Tutoriumsaufgabe 2 implementiert werden kann. Weiterhin können sie den Befehl aus Tutoriumsaufgabe 2(b) nutzen.

Aufgabe 7 (Semi-Entscheidbarkeit)**6 (3 + 3) Punkte**

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils an, ob sie entscheidbar sind. Geben Sie ausserdem an, ob die Sprachen und ihre Komplemente semi-entscheidbar sind. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

- a) $L_1 = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$
- b) $L_2 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ erreicht auf jeder Eingabe den Zustand } q_7\}$