

# Übungsblatt 8

Abgabetermin: Mittwoch, der 14. Dezember 2022 um 14:30

- Die Abgabe dieses Blattes wird am Mittwoch, dem 07.12. um 16 Uhr freigeschaltet.
- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online via Moodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer des Tutoriums, Nummer des Übungsblattes und Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert. Als Dateiname bitte Blatt-XX\_Tutorium-YY\_Gruppe-ZZZ.pdf mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen verwenden.
- Musterlösungen zu den Hausaufgaben werden nach der Globalübung am Mittwoch, dem 14.12. in Moodle hochgeladen.

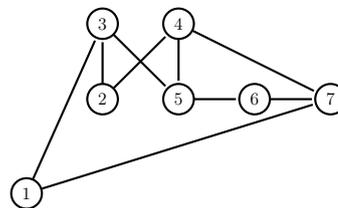
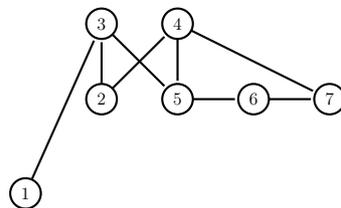
### Tutoriumsaufgabe 1 (Färbbarkeit)

Gegeben seien die folgenden Probleme:

2-COLORABILITY =  $\{G \mid G = (V, E) \text{ ist ein Graph und es existiert eine Abbildung } c : V \rightarrow \{1, 2\} \text{ mit } c(v) \neq c(w) \text{ für alle } (v, w) \in E\}$

3-COLORABILITY =  $\{G \mid G = (V, E) \text{ ist ein Graph und es existiert eine Abbildung } c : V \rightarrow \{1, 2, 3\} \text{ mit } c(v) \neq c(w) \text{ für alle } (v, w) \in E\}$

- a) Entscheiden Sie für die folgenden zwei Beispielgraphen, ob sie jeweils in 2-COLORABILITY enthalten sind. Falls der Graph 2-färbbar ist, geben Sie dazu eine korrekte 2-Färbung an. Andernfalls begründen Sie, warum keine korrekte 2-Färbung existieren kann.



- b) Zeigen Sie, dass 2-COLORABILITY in P liegt, indem Sie einen entsprechenden Algorithmus angeben, der das Problem auf allen Graphen löst. Erläutern Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.
- c) Zeigen Sie, dass 3-COLORABILITY in NP liegt.

### Tutoriumsaufgabe 2 (Entscheidungsvariante zu Optimierungsvariante)

Zeigen Sie: Wenn die Entscheidungsvariante TSP-E des TRAVELING SALESMAN PROBLEM (TSP, siehe Folie 404) in P ist, so kann auch die Optimierungsvariante TSP in polynomieller Zeit gelöst werden.

### Tutoriumsaufgabe 3 (Zertifikat und Verifizierer)

Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist genau dann in NP, wenn es einen Polynomialzeitalgorithmus  $V$  (einen sogenannten Verifizierer) und ein Polynom  $p$  mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y \in \{0, 1\}^*, |y| \leq p(|x|) : V \text{ akzeptiert } y\#x.$$

Der String  $y$  wird dabei als Zertifikat für die Eingabe  $x$  bezeichnet (siehe Vorlesung 14, Folie 411ff).

Zeigen Sie, jeweils mit Hilfe eines Polynomialzeitverifizierers, dass die folgenden Entscheidungsprobleme in NP sind. Beschreiben Sie dazu im Detail die Kodierung und die Länge des Zertifikats, sowie die Arbeitsweise und die Laufzeit des Verifizierers (eine Beschreibung ähnlich zu Folie 417 ist **nicht** hinreichend detailliert).

- a) Sei  $G = (V, E, w)$  ein gewichteter Graph, ein Spannbaum von  $G$  ist ein Baum  $T = (V_T, E_T)$ , sodass  $V_T = V$  und  $E_T \subseteq E$ . Die Kosten eines Spannbaums  $T = (V_T, E_T)$  sind  $\sum_{e \in E_T} w(e)$ .

$$\text{MAXIMUMSPANNINGTREE} = \{(G, c) \mid c \in \mathbb{N}, G \text{ ist ein gewichteter Graph und} \\ \text{hat einen Spannbaum mit Kosten } \geq c\}$$

- b)  $\text{COMPOSITE} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ist die binäre Kodierung einer Zahl } k \in \mathbb{N} \text{ und } k \\ \text{ist keine Primzahl}\}$

- c)  $\text{GRAPHISOMORPHIE} = \{G_1\#G_2 \mid G_1, G_2 \text{ sind Graphen und } G_1 \text{ ist isomorph zu } G_2\}$

### Aufgabe 4 (Entscheidungsvariante zu Optimierungsvariante)

5 Punkte

Zeigen Sie: Falls die Entscheidungsvariante BPP-E des BIN PACKING PROBLEM (BPP, siehe Folie 400) in P ist, so kann auch die Optimierungsvariante BPP in polynomieller Zeit gelöst werden.

**Aufgabe 5 (Zertifikat und Verifizierer)****6 (2 + 2 + 2) Punkte**

Zeigen Sie, jeweils mit Hilfe eines Polynomialzeitverifizierers, dass die folgenden Entscheidungsprobleme in NP sind. Beschreiben Sie dazu im Detail die Kodierung und die Länge des Zertifikats, sowie die Arbeitsweise und die Laufzeit des Verifizierers (eine Beschreibung ähnlich zu Folie 417 ist **nicht** hinreichend detailliert).

- a) Für Vektoren  $c, d \in \mathbb{Z}^k$  sei  $c \geq d$  falls für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt, dass  $c_i \geq d_i$ . Wir betrachten folgendes Entscheidungsproblem:

$\{-1, 0, 1\}$ -RESTRICTED INTEGER PROGRAMMING

**Eingabe:** Eine Matrix  $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$  und ein Vektor  $b \in \{-1, 0, 1\}^m$ .

**Frage:** Gibt es einen Vektor  $x \in \{0, 1\}^n$  mit  $Ax \geq b$ ?

- b) Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Ein *Matching* ist eine Teilmenge  $X \subseteq E$ , sodass jeder Knoten in  $V$  inzident ist zu maximal einer Kante in  $X$ .

MATCHING =  $\{(G, k) \mid k \in \mathbb{N}, G \text{ ist ein Graph und hat ein Matching der Größe } k\}$

- c) MAXCUT =  $\{(G, k) \mid k \in \mathbb{N}, G \text{ ist ein Graph und es gibt eine Teilmenge von Knoten } S, \text{ sodass es mindestens } k \text{ Kanten gibt zwischen } S \text{ und } V \setminus S\}$

**Aufgabe 6 (nicht zusammenhängende Graphen)****4 Punkte**

Es sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

Wir definieren nun das Problem GRAPHNICHTZUSAMMENHANG:

GRAPHNICHTZUSAMMENHANG =  $\{G \mid G \text{ ist ein Graph, der nicht zusammenhängend ist}\}$ .

Zeigen Sie  $\text{GRAPHNICHTZUSAMMENHANG} \leq_p \text{SAT}$ . Sie dürfen in der Reduktion *nicht* verwenden, dass GRAPHZUSAMMENHANG in P liegt.