Prof. Dr. M. Grohe E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt 9

Abgabetermin: Mittwoch, der 21. Dezember 2022 um 14:30

- Die Abgabe dieses Blattes wird am Mittwoch, dem 14.12. um 16 Uhr freigeschaltet.
- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online via Moodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer des Tutoriums**, **Nummer des Übungsblattes** und **Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert. Als Dateiname bitte Blatt-XX_Tutorium-YY_Gruppe-ZZZ.pdf mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen verwenden.
- Musterlösungen zu den Hausaufgaben werden nach der Globalübung am Mittwoch, dem 21.12. in Moodle hochgeladen.

Tutoriumsaufgabe 1

Eine aussagenlogische Formel φ ist in XOR-KNF, falls φ eine Konjunktion von Klauseln der Form

$$C_i = \lambda_{i,1} \oplus \ldots \oplus \lambda_{i,k}$$

ist, d.h. jede Klausel C_i besteht aus einem XOR ($\oplus$, exklusives oder) von Literalen. Wir definieren das Erfüllbarkeitsproblem für XOR-KNF-Formeln:

XOR-SAT

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel φ in XOR-KNF.

Frage: Existiert eine erfüllende Belegung α für φ?

Zeigen Sie, dass XOR-SAT in P liegt. Sie können ohne Beweis verwenden, dass der Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme über endlichen Körpern in Polynomialzeit läuft.

Tutoriumsaufgabe 2

Wir betrachten das folgende Problem:

> 2SAT
>
> **Eingabe:** Eine aussagenlogische Formel φ in 2-KNF.
>
> **Frage:** Existiert eine erfüllende Belegung α für φ?

Zeigen Sie, dass 2SAT in P liegt.

Hinweis: Nutzen sie aus, dass $(X \vee Y)$ äquivalent zu $(\overline{X} \to Y) \wedge (\overline{Y} \to X)$ ist und konstruieren Sie einen gerichteten Graphen, dessen Kanten die Implikationen wiederspiegeln.

Tutoriumsaufgabe 3

Wir betrachten die folgende Variante von SAT:

> Not-All-Equal-SAT
>
> **Eingabe:** Eine aussagenlogische Formel φ in KNF.
>
> **Frage:** Existiert eine erfüllende Belegung α für φ so, dass α mindestens ein Literal jeder Klausel von φ *nicht* erfüllt?

a) Zeigen Sie durch Angabe geeigneter Zertifikate und eines Verifizierers, dass Not-All-Equal-SAT $\in \mathsf{NP}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass Not-All-Equal-SAT NP-schwer ist.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Eine aussagenlogische Formel ist in *disjunktiver Normalform* (DNF), falls sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.

Wir betrachten das Erfüllbarkeitsproblem für DNF-Formeln:

> DNF-SAT
>
> **Eingabe:** Eine aussagenlogische Formel φ in DNF.
>
> **Frage:** Existiert eine erfüllende Belegung α für φ?

Zeigen Sie, dass DNF-SAT in P liegt.

Aufgabe 5 **5 Punkte**

Wir betrachten die folgende Variante von SAT:

> Max-3-Vorkommnisse-SAT
>
> **Eingabe:** Eine aussagenlogische Formel φ in KNF, wobei jede Variable von φ höchstens 3 mal vorkommt.
>
> **Frage:** Existiert eine erfüllende Belegung α für φ?

Zeigen Sie, dass Max-3-Vorkommnisse-SAT NP-schwer ist.

Aufgabe 6 **6 Punkte**

Wir betrachten das folgende Problem (siehe Übungsblatt 8):

> $\{-1,0,1\}$-Restricted Integer Programming
>
> **Eingabe:** Eine Matrix $A \in \{-1,0,1\}^{m\times n}$ und ein Vektor $b \in \{-1,0,1\}^m$.
>
> **Frage:** Gibt es einen Vektor $x \in \{0,1\}^n$ mit $Ax \geq b$?

Zeigen Sie, dass $\{-1,0,1\}$-Restricted Integer Programming NP-vollständig ist.