Prof. Dr. M. Grohe E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt 10

Abgabetermin: Mittwoch, der 18. Januar 2023 um 14:30

- Die Abgabe dieses Blattes wird am Mittwoch, dem 11.01. um 16 Uhr freigeschaltet.
- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online via Moodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer des Tutoriums**, **Nummer des Übungsblattes** und **Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert. Als Dateiname bitte Blatt-XX_Tutorium-YY_Gruppe-ZZZ.pdf mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen verwenden.
- Musterlösungen zu den Hausaufgaben werden nach der Globalübung am Mittwoch, dem 18.01. in Moodle hochgeladen.
- Die Tutorien zu diesem Blatt finden in der Woche vom 9.01.-13.01. statt.

Tutoriumsaufgabe 1 (Makespan Scheduling)

Das Makespan-Scheduling-Problem ist das folgende Optimierungsproblem:

Makespan-Scheduling

Eingabe: m Maschinen, n Jobs mit Laufzeiten $p_1, \dots, p_n$.

zulässige Lösungen: Jede Zuteilung $s\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ der Jobs auf die Maschinen.

Zielfunktion: Minimiere den Makespan, d.h. minimiere $\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j:s(j)=i} p_j$.

a) Definieren Sie die Entscheidungsvariante des Makespan-Scheduling-Problems.

b) Zeigen Sie, dass Subset-Sum polynomiell auf die Entscheidungsvariante von Makespan-Scheduling reduziert werden kann.

Prof. Dr. M. Grohe E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Tutoriumsaufgabe 2 (Independent Set und Vertex Cover)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Probleme Independent Set und Vertex cover.

IndependentSet
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenmenge $D \subseteq V$ mit $\lvert D\rvert \geq k$, so dass für jedes Paar von Knoten $u, v \in D$ gilt $(u, v) \notin E$?

VertexCover
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenmenge $D \subseteq V$ mit $\lvert D\rvert \leq k$, so dass für jede Kante $(u, v) \in E$ mindestens einer der Endpunkte in D liegt, also $u \in D \vee v \in D$?

Zeigen Sie, dass beide Probleme NP-Vollständig sind.

a) Zeigen Sie, dass VertexCover in NP liegt. (Der Beweis für IndependentSet ist analog)

b) Zeigen Sie, dass IndependentSet NP-Schwer ist

c) Zeigen Sie IndependentSet $\leq_p$ VertexCover.

Aufgabe 3 (Quadratisches Zuordnungsproblem) 6 Punkte

Wie üblich bezeichnen wir mit der Notation $[n]$ die Menge $\{1, \ldots, n\}$.

QUADRATICASSIGNMENT

Eingabe: Nicht-negative Integer Kosten $c_{ij}, i, j \in [n]$, Distanzen $d_{kl}, k, l \in [m]$ (mit $m \geq n$) und eine Schranke $b \in \mathbb{Z}^+$.

Frage: Gibt es eine injektive Abbildung $\sigma : [n] \to [m]$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_{ij} d_{\sigma(i)\sigma(j)} \leq b?$$

Eine mögliche Interpretation des Problems ist es eine Menge $[n]$ von Fabriken so an den m möglichen Standorten anzusiedeln, dass die gesamten Transportkosten minimal sind. Dabei gibt c_{ij} die Menge Material an, das zwischen den Fabriken i und j transportiert werden muss und d_{kl} die Distanz zwischen dem k-ten und l-ten Standort.
Dieses Problem ist insbesondere beim Entwerfen von Platinen auch von praktischer Relevanz.
Zeigen Sie, dass das Problem QUADRATICASSIGNMENT NP-vollständig ist.
Hinweis: Wir empfehlen eine Reduktion vom Problem TSP.

Aufgabe 4 (Set Cover) 6 Punkte

Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem.

SETCOVER

Eingabe: Eine endliche Menge U, eine Menge $\mathcal{S} \subseteq \text{Pot}(U) := \{V \mid V \subseteq U\}$ und $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$, sodass $|\mathcal{C}| \leq k$ und jedes Element von U durch $\mathcal{C}$ abgedeckt ist, d.h.

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V\,.$$

Zeigen Sie, dass das SETCOVER-Problem NP-vollständig ist.

Aufgabe 5 (Abschlusseigenschaften) **3(2+1) Punkte**

Wir definieren $\mathsf{coNP} = \{\overline{L} \mid L \in \mathsf{NP}\}$, die Klasse der Komplemente aller Sprachen, welche in NP liegen.

a) Beweisen Sie, dass die Komplexitätsklasse NP unter den Operationen Vereinigung und Durchschnitt abgeschlossen ist. Folgern Sie daraus, dass auch coNP unter Operationen Vereinigung und Durchschnitt abgeschlossen ist.

b) Es seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ zwei Sprachen mit $L_1, L_2 \in \mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$. Beweisen Sie, dass dann die Sprache

$$L_1 \oplus L_2 \ := \ \{x \in \Sigma^* \mid x \in L_1 \setminus L_2 \text{ oder } x \in L_2 \setminus L_1\}$$

ebenfalls in $\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$ liegt.