Prof. Dr. M. Grohe

E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt 11

Abgabetermin: Mittwoch, der 25. Januar 2023 um 14:30

- Die Abgabe dieses Blattes wird am Mittwoch, dem 18.01. um 16 Uhr freigeschaltet.
- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online via Moodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer des Tutoriums**, **Nummer des Übungsblattes** und **Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert. Als Dateiname bitte Blatt-XX_Tutorium-YY_Gruppe-ZZZ.pdf mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen verwenden.
- Musterlösungen zu den Hausaufgaben werden nach der Globalübung am Mittwoch, dem 25.01. in Moodle hochgeladen.

Tutoriumsaufgabe 1 (Dominating Set)

Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem:

DOMINATING SET

Eingabe: Ein Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Knotenmenge $D \subseteq V(G)$ mit $|D| \leq k$, so dass für jeden Knoten $v \in V(G) \setminus D$ ein Knoten $w \in D$ mit $vw \in E(G)$ existiert?

Zeigen Sie, dass DOMINATING SET NP-schwer ist.

Tutoriumsaufgabe 2 (Approximation für Vertex Cover)

a) Sei G ein Graph, M ein Matching von G und C ein Vertex Cover von G. Zeigen Sie, dass $|M| \leq |C|$ gilt.

b) Entwickeln Sie einen 2-Approximationsalgorithmus für VERTEX COVER mit polynomieller Laufzeit.

c) Zeigen Sie durch die Angabe eines geeigneten Graphen, dass Ihr Algorithmus für jedes $\varepsilon > 0$ kein $(2 - \varepsilon)$-Approximationsalgorithmus ist.

Hinweis: Betrachten Sie für (b) inklusionsweise maximale Matchings.

Tutoriumsaufgabe 3 (Graph Homomorphism)

Sei H ein Graph. Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem:

> GRAPH HOMOMORPHISM
>
> **Eingabe:** Zwei Graphen G und H.
>
> **Frage:** Gibt es einen Homomorphismus von G nach H, d.h. existiert eine Abbildung $f\colon V(G) \to V(H)$ so, dass für alle $v, w \in V(G)$ mit $vw \in E(G)$ auch $f(v)f(w) \in E(H)$ gilt?

Zeigen Sie, dass GRAPH HOMOMORPHISM NP-schwer ist.

Aufgabe 4 (Set Packing) — 6 Punkte

Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem:

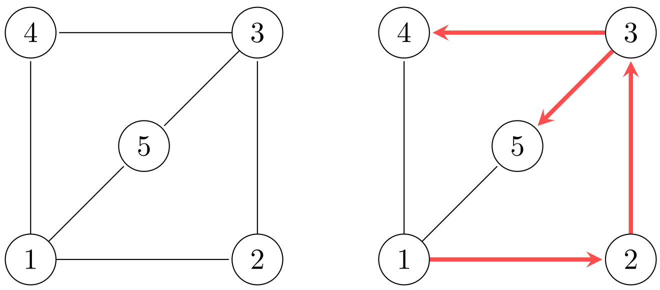
> SET PACKING
>
> **Eingabe:** Eine Menge U, eine Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Pot}(U)$, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
>
> **Frage:** Enthält $\mathcal{S}$ k disjunkte Mengen, d.h. existiert eine Menge $\mathcal{S}' = \{S_1, \ldots, S_k\} \subseteq \mathcal{S}$ der Größe k mit $S_i \cap S_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$?

Zeigen Sie, dass SET PACKING NP-vollständig ist.

Aufgabe 5 (Approximation für Vertex Cover) **9 (2 + 3 + 2 + 2) Punkte**

Wir erinnern uns an die Tiefensuche (DFS) in Graphen. Ein Durchlauf der Tiefensuche auf einem zusammenhängenden Graphen G kann durch einen (gerichteten) *DFS-Spannbaum* T repräsentiert werden, welcher genau die Kanten enthält, die in der Ausführung "genommen" wurden.

Zum Beispiel repräsentiert der rot (und dick) gedruckte Spannbaum T rechts einen DFS-Durchlauf auf dem linken Graphen, beginnend beim Knoten 1.



Wir bezeichnen die Knoten eines solchen Baums T, welche keine ausgehende Kante besitzen, als die *Blätter* von T; alle anderen Knoten nennen wir *interne Knoten*.

a) Sei G ein zusammenhängender Graph und T ein DFS-Spannbaum von G. Zeigen Sie, dass die Blätter von T ein Independent Set von G sind.

b) Zeigen Sie, dass jeder Baum T ein Matching besitzt, welches alle internen Knoten von T überdeckt.

c) Folgern Sie, dass das folgende Verfahren ein 2-Approximationsalgorithmus für Vertex Cover auf zusammenhängenden Graphen ist:

1. Wähle einen beliebigen Startknoten $r \in V(G)$.
2. Berechne mittels Tiefensuche von r aus einen DFS-Spannbaum T von G.
3. Gebe $I(T) = \{v \in V(G) \mid v \text{ ist interner Knoten von } T\}$ aus.

d) Zeigen Sie durch die Angabe einer geeigneten Familie $\mathcal{G} = (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Graphen, dass für alle $\varepsilon > 0$ das obrige Verfahren kein $(2-\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus für Vertex Cover ist.