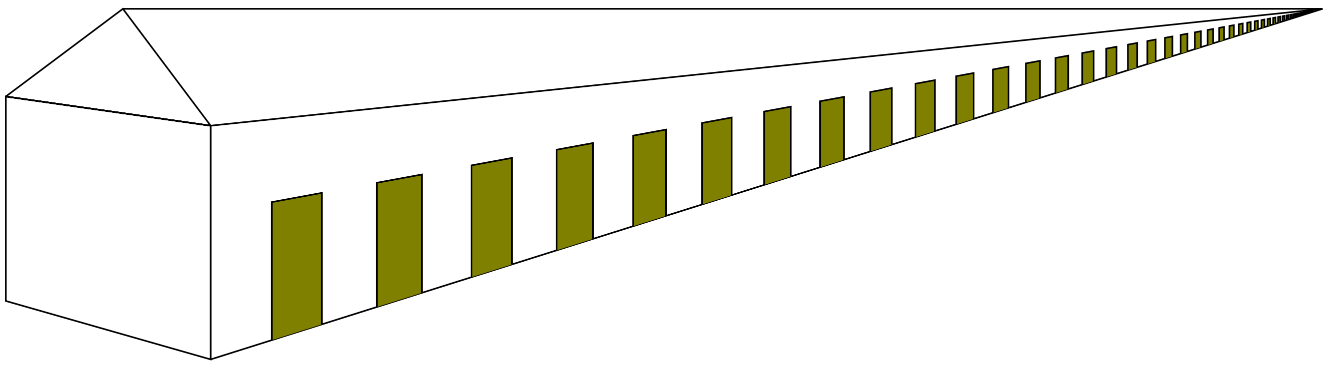
Vorlesung 6
Unentscheidbarkeit des Halteproblems: Unterprogrammtechnik

Wdh.: Hilbert's Hotel



Wdh.: Abzählbarkeit

Definition (Abzählbare Menge)

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie leer ist oder wenn es eine surjektive Funktion $c \colon \mathbb{N} \to M$ gibt.

Abzählbare Mengen: endlichen Mengen, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $\{0,1\}^*$, Menge der Gödelnummern, die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

Satz

Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Überabzählbare Mengen: $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\{0,1\}^*)$, Menge der Berechnungsprobleme.

Schlussfolgerung: Es gibt nicht-berechenbare Probleme.

Wdh.: Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Die Diagonalsprache:

$$\begin{aligned} D &= \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ akteptiert } \langle M \rangle \text{ nicht}\}. \end{aligned}$$

Wdh.: Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Die Diagonalsprache:

$$D = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$
$$= \{\langle M \rangle \mid M \text{ akteptiert } \langle M \rangle \text{ nicht}\}.$$

Satz

Die Diagonalsprache D ist unentscheidbar (= nicht entscheidbar).

Wdh.: Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Die Diagonalsprache:

$$D = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$
$$= \{\langle M \rangle \mid M \text{ akteptiert } \langle M \rangle \text{ nicht}\}.$$

Satz

Die Diagonalsprache D ist unentscheidbar (= nicht entscheidbar).

Beweisansatz: Diagonalisierung

Wdh.: Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } M_i \text{ das Wort } w_j \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wdh.: Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } M_i \text{ das Wort } w_j \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	
M_0	**0**	1	1	0	1	$\cdots$
M_1	1	**0**	1	0	1	$\cdots$
M_2	0	0	**1**	0	1	$\cdots$
M_3	0	1	1	**1**	0	$\cdots$
M_4	0	1	0	0	**0**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Wdh.: Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } M_i \text{ das Wort } w_j \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	
M_0	**0**	1	1	0	1	$\cdots$
M_1	1	**0**	1	0	1	$\cdots$
M_2	0	0	**1**	0	1	$\cdots$
M_3	0	1	1	**1**	0	$\cdots$
M_4	0	1	0	0	**0**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Die Diagonalsprache lässt sich auf der Diagonale der Matrix ablesen. Es ist

$$D = \{w_i \mid A_{i,i} = 0\} \ .$$

Das Komplement der Diagonalsprache

Das "Komplement" der Diagonalsprache ist

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert } \langle M \rangle\}. \end{aligned}$$

Tatsächlich ist $\overline{D}$ nicht das Komplement on D in $\{0,1\}^*$, sondern lediglich in der Menge der Gödelnummern. Das heißt, sowohl D als auch $\overline{D}$ bestehen nur aus Gödelnummern, und eine Gödelnummer w_i ist genau dann in $\overline{D}$, wenn sie nicht in D ist.

Das Komplement der Diagonalsprache

Das “Komplement” der Diagonalsprache ist

$$\begin{aligned}\overline{D} &= \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w\} \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert } \langle M\rangle\}.\end{aligned}$$

Tatsächlich ist $\overline{D}$ nicht das Komplement on D in $\{0,1\}^*$, sondern lediglich in der Menge der Gödelnummern. Das heißt, sowohl D als auch $\overline{D}$ bestehen nur aus Gödelnummern, und eine Gödelnummer w_i ist genau dann in $\overline{D}$, wenn sie nicht in D ist.

Satz

$\overline{D}$ *ist unentscheidbar.*

Unentscheidbarkeit des Diagonalsprachenkomplements

Satz

$\overline{D}$ *ist unentscheidbar.*

Unentscheidbarkeit des Diagonalsprachenkomplements

Satz
$\overline{D}$ ist unentscheidbar.

Beweis
- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM $M_{\overline{D}}$, welche die Sprache $\overline{D}$ entscheidet.

Unentscheidbarkeit des Diagonalsprachenkomplements

Satz
$\overline{D}$ ist unentscheidbar.

Beweis
- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM $M_{\overline{D}}$, welche die Sprache $\overline{D}$ entscheidet.
- Gemäß der Definition *entscheidbarer Sprachen* hält $M_{\overline{D}}$ auf jeder Eingabe w und akzeptiert genau dann, wenn $w \in \overline{D}$.

Unentscheidbarkeit des Diagonalsprachenkomplements

Satz

$\overline{D}$ *ist unentscheidbar.*

Beweis

- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM $M_{\overline{D}}$, welche die Sprache $\overline{D}$ entscheidet.
- Gemäß der Definition *entscheidbarer Sprachen* hält $M_{\overline{D}}$ auf jeder Eingabe w und akzeptiert genau dann, wenn $w \in \overline{D}$.
- Wir konstruieren nun eine TM M, die $M_{\overline{D}}$ als Unterprogramm verwendet.

Unentscheidbarkeit des Diagonalsprachenkomplements

Satz

$\overline{D}$ *ist unentscheidbar.*

Beweis

- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM $M_{\overline{D}}$, welche die Sprache $\overline{D}$ entscheidet.
- Gemäß der Definition *entscheidbarer Sprachen* hält $M_{\overline{D}}$ auf jeder Eingabe w und akzeptiert genau dann, wenn $w \in \overline{D}$.
- Wir konstruieren nun eine TM M, die $M_{\overline{D}}$ als Unterprogramm verwendet.
- M prüft zunächst, ob die Eingabe eine Gödelnummer ist und verwirft, wenn dass nicht der Fall ist.

Unentscheidbarkeit des Diagonalsprachenkomplements

Satz

$\overline{D}$ *ist unentscheidbar.*

Beweis

- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM $M_{\overline{D}}$, welche die Sprache $\overline{D}$ entscheidet.
- Gemäß der Definition *entscheidbarer Sprachen* hält $M_{\overline{D}}$ auf jeder Eingabe w und akzeptiert genau dann, wenn $w \in \overline{D}$.
- Wir konstruieren nun eine TM M, die $M_{\overline{D}}$ als Unterprogramm verwendet.
- M prüft zunächst, ob die Eingabe eine Gödelnummer ist und verwirft, wenn dass nicht der Fall ist.
- Sonst startet M das Unterprogramm $M_{\overline{D}}$ auf der vorliegenden Eingabe und negiert anschließend die Ausgabe von $M_{\overline{D}}$.

Unentscheidbarkeit des Diagonalsprachenkomplements

Satz

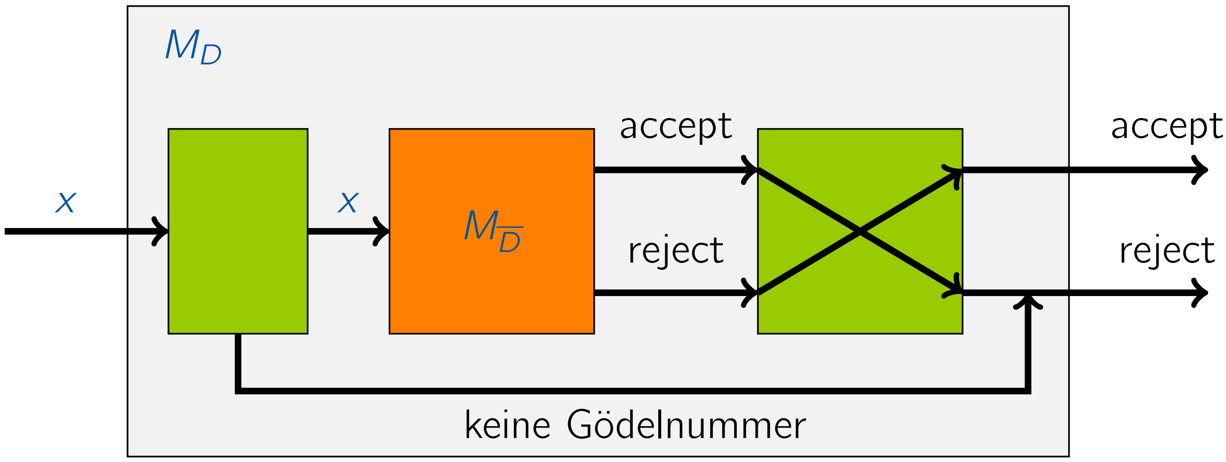
$\overline{D}$ *ist unentscheidbar.*

Beweis

- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM $M_{\overline{D}}$, welche die Sprache $\overline{D}$ entscheidet.
- Gemäß der Definition *entscheidbarer Sprachen* hält $M_{\overline{D}}$ auf jeder Eingabe w und akzeptiert genau dann, wenn $w \in \overline{D}$.
- Wir konstruieren nun eine TM M, die $M_{\overline{D}}$ als Unterprogramm verwendet.
- M prüft zunächst, ob die Eingabe eine Gödelnummer ist und verwirft, wenn dass nicht der Fall ist.
- Sonst startet M das Unterprogramm $M_{\overline{D}}$ auf der vorliegenden Eingabe und negiert anschließend die Ausgabe von $M_{\overline{D}}$.
- Die TM M entscheidet nun offensichtlich D. Ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von D. □

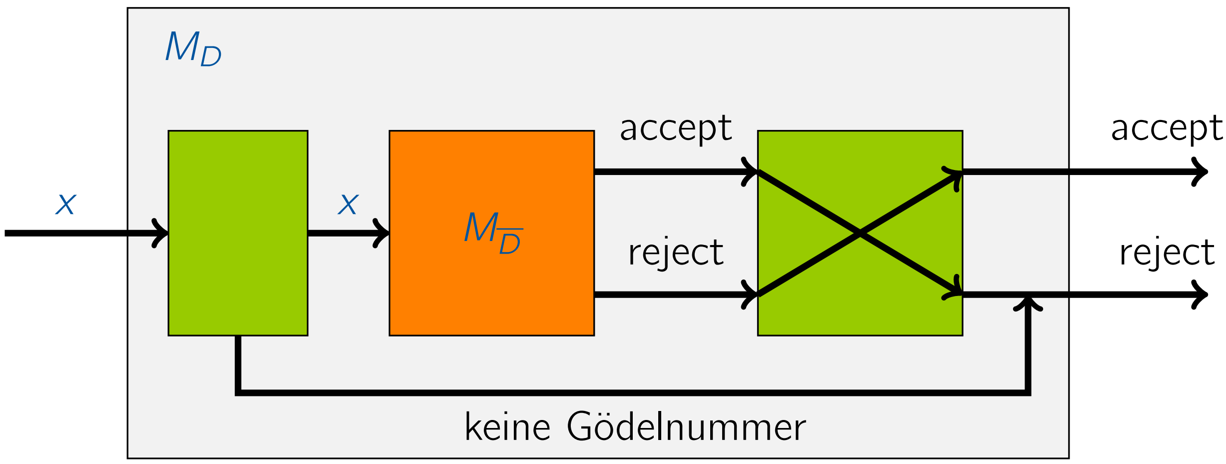
Unentscheidbarkeit des Komplements der Diagonalsprache

Illustration: Aus $M_{\overline{D}}$ konstruieren wir M_D.



Unentscheidbarkeit des Komplements der Diagonalsprache

Illustration: Aus $M_{\overline{D}}$ konstruieren wir M_D.



Aber die Existenz von M_D steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von D. Damit kann es $M_{\overline{D}}$ nicht geben, also ist $\overline{D}$ nicht entscheidbar.

Unterprogrammtechnik

Die Beweistechnik aus diesem Satz lässt sich allgemein wie folgt zusammenfassen:

Unterprogrammtechnik

Die Beweistechnik aus diesem Satz lässt sich allgemein wie folgt zusammenfassen:

Unterprogrammtechnik zum Beweis von Unentscheidbarkeit

Um nachzuweisen, dass eine Sprache L unentscheidbar ist, genügt es zu zeigen, dass man durch Unterprogrammaufruf einer TM M_L, die L entscheidet, ein andere Sprache L' entscheiden kann, von der bereits bewiesen wurde, dass sie unentscheidbar ist.

Unterprogrammtechnik

Die Beweistechnik aus diesem Satz lässt sich allgemein wie folgt zusammenfassen:

Unterprogrammtechnik zum Beweis von Unentscheidbarkeit

Um nachzuweisen, dass eine Sprache L unentscheidbar ist, genügt es zu zeigen, dass man durch Unterprogrammaufruf einer TM M_L, die L entscheidet, ein andere Sprache L' entscheiden kann, von der bereits bewiesen wurde, dass sie unentscheidbar ist.

Im Folgenden demonstrieren wir die Unterprogrammtechnik an einigen Beispielsprachen, inklusive dem Halteproblem.

Das Halteproblem

Das Halteproblem ist wie folgt definiert:

$$H = \{\langle M\rangle w \mid M \text{ hält auf } w\} .$$

Das Halteproblem

Das Halteproblem ist wie folgt definiert:

$$H = \{\langle M\rangle w \mid M \text{ hält auf } w\} \; .$$

Satz

Das Halteproblem H ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das Halteproblem H ist unentscheidbar.

Beweis

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik:

- Sei M_H eine TM, die H entscheidet, also eine TM, die auf jeder Eingabe hält und nur Eingaben der Form $\langle M\rangle w$ akzeptiert, bei denen M auf w hält.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das Halteproblem H ist unentscheidbar.

Beweis

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik:

- Sei M_H eine TM, die H entscheidet, also eine TM, die auf jeder Eingabe hält und nur Eingaben der Form $\langle M \rangle w$ akzeptiert, bei denen M auf w hält.
- Wir konstruieren eine TM $M_{\overline{D}}$ mit M_H als Unterprogramm, die $\overline{D}$ entscheidet, was im Widerspruch zur Nicht-Berechenbarkeit von $\overline{D}$ steht.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das Halteproblem H ist unentscheidbar.

Beweis

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik:

- Sei M_H eine TM, die H entscheidet, also eine TM, die auf jeder Eingabe hält und nur Eingaben der Form $\langle M \rangle w$ akzeptiert, bei denen M auf w hält.
- Wir konstruieren eine TM $M_{\overline{D}}$ mit M_H als Unterprogramm, die $\overline{D}$ entscheidet, was im Widerspruch zur Nicht-Berechenbarkeit von $\overline{D}$ steht.

Aus diesem Widerspruch ergibt sich die Nicht-Existenz der TM M_H.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Beweis

Algorithmus der TM $M_{\overline{D}}$ mit Unterprogramm M_H:

1) Teste, ob w Gödelnummer. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM mit $w = \langle M \rangle$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Beweis

Algorithmus der TM $M_{\overline{D}}$ mit Unterprogramm M_H:

1) Teste, ob w Gödelnummer. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM mit $w = \langle M \rangle$

2) Starte M_H als Unterprogramm mit Eingabe $ww = \langle M \rangle w$.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Beweis

Algorithmus der TM $M_{\overline{D}}$ mit Unterprogramm M_H:

1) Teste, ob w Gödelnummer. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM mit $w = \langle M \rangle$
2) Starte M_H als Unterprogramm mit Eingabe $ww = \langle M \rangle w$.
   - 3.1) Falls M_H akzeptiert, so simuliere das Verhalten von M auf w mittels universeller TM U.

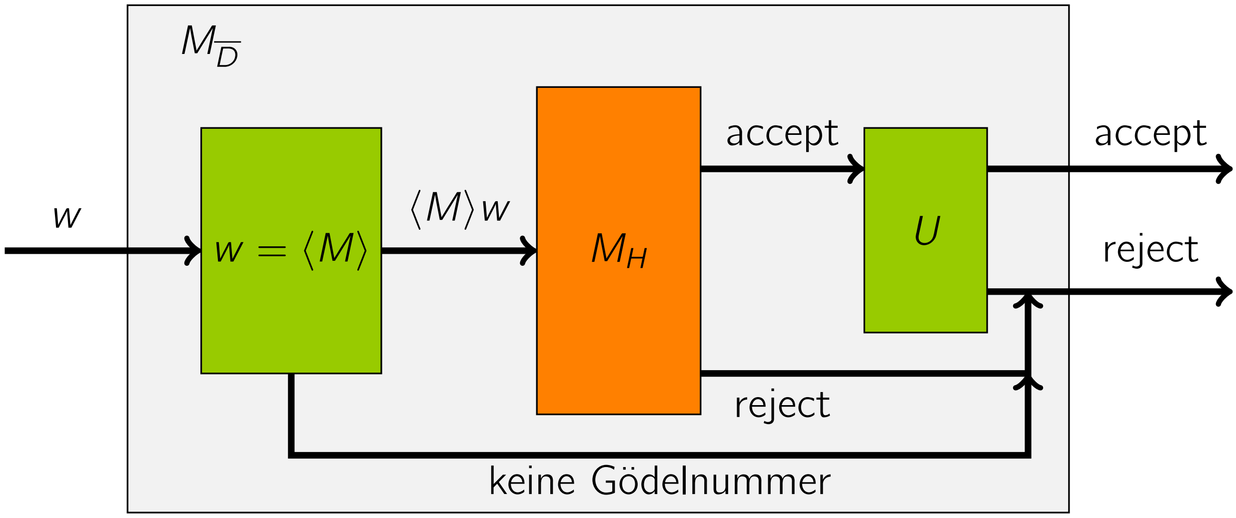
Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Beweis

Algorithmus der TM $M_{\overline{D}}$ mit Unterprogramm M_H:

1) Teste, ob w Gödelnummer. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM mit $w = \langle M \rangle$
2) Starte M_H als Unterprogramm mit Eingabe $ww = \langle M \rangle w$.
   - 3.1) Falls M_H akzeptiert, so simuliere das Verhalten von M auf w mittels universeller TM U.
   - 3.2) Falls M_H verwirft, so verwirf die Eingabe.

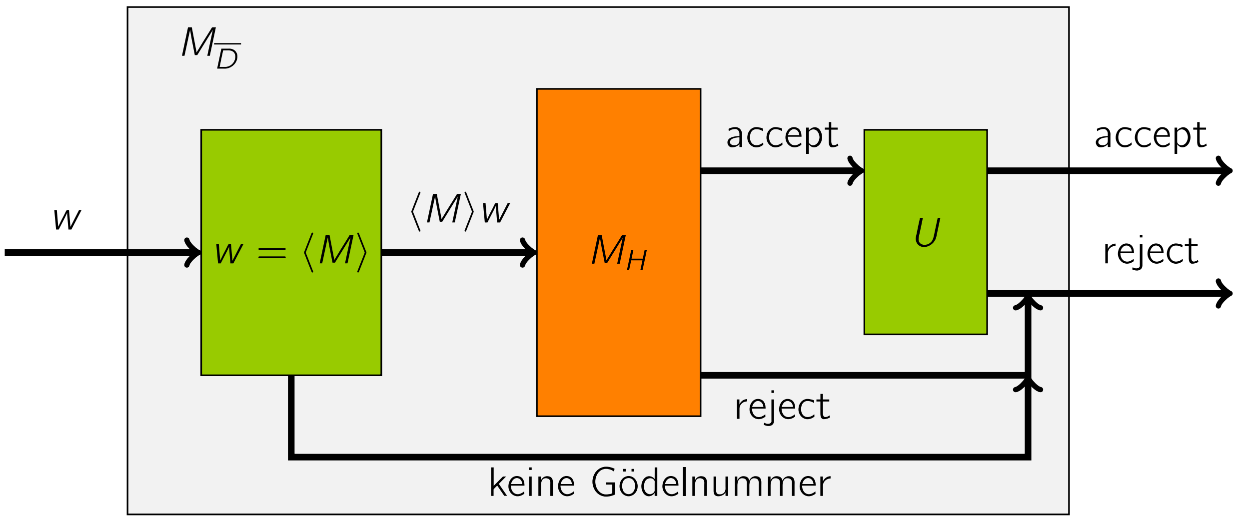
Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Illustration: Aus M_H konstruieren wir $M_{\overline{D}}$.



Unentscheidbarkeit des Halteproblems

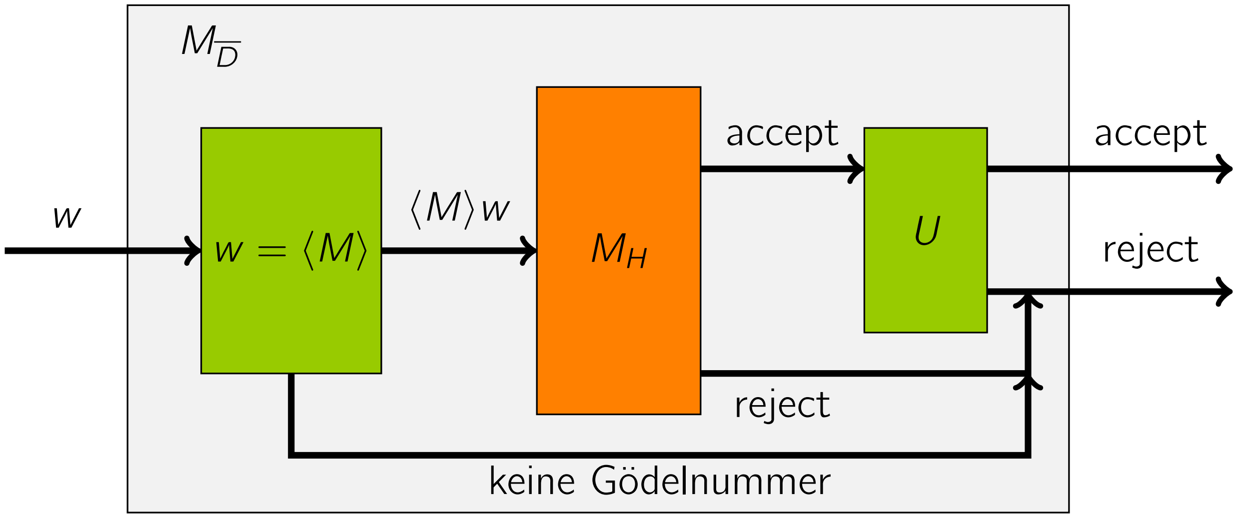
Illustration: Aus M_H konstruieren wir $M_{\overline{D}}$.



Aber die Existenz von $M_{\overline{D}}$ steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $\overline{D}$. Damit kann es M_H nicht geben und das Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Illustration: Aus M_H konstruieren wir $M_{\overline{D}}$.



Aber die Existenz von $M_{\overline{D}}$ steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $\overline{D}$. Damit kann es M_H nicht geben und das Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

Anmerkung: Der Test, ob w eine Gödelnummer ist ist nicht unbedingt erforderlich, weil M_H immer verwirft, wenn der erste Teil der Eingabe keine Gödelnummer ist.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Wir müssen zeigen, dass $M_{\overline{D}}$ korrekt arbeitet.

Für die Korrektheit ist zu zeigen:

1. $w \in \overline{D} \;\Rightarrow\; M_{\overline{D}}$ akzeptiert w
2. $w \notin \overline{D} \;\Rightarrow\; M_{\overline{D}}$ verwirft w

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Es gilt

$$w \in \overline{D} \quad \Rightarrow$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Es gilt

$$w \in \overline{D} \quad \Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w.$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \in \overline{D} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w. \\ &\Rightarrow \quad M_H \text{ und } U \text{ akzeptieren } \langle M \rangle w. \end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \in \overline{D} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w. \\ &\Rightarrow \quad M_H \text{ und } U \text{ akzeptieren } \langle M \rangle w. \\ &\Rightarrow \quad M_{\overline{D}} \text{ akzeptiert } w. \end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \in \overline{D} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w. \\ &\Rightarrow \quad M_H \text{ und } U \text{ akzeptieren } \langle M \rangle w. \\ &\Rightarrow \quad M_{\overline{D}} \text{ akzeptiert } w. \end{aligned}$$

$$w \notin \overline{D} \quad \Rightarrow$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \in \overline{D} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w. \\ &\Rightarrow \quad M_H \text{ und } U \text{ akzeptieren } \langle M \rangle w. \\ &\Rightarrow \quad M_{\overline{D}} \text{ akzeptiert } w. \end{aligned}$$

$$w \notin \overline{D} \quad \Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht.}$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \in \overline{D} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w. \\ &\Rightarrow \quad M_H \text{ und } U \text{ akzeptieren } \langle M \rangle w. \\ &\Rightarrow \quad M_{\overline{D}} \text{ akzeptiert } w. \end{aligned}$$

$$w \notin \overline{D} \quad \Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht.}$$

$$\Rightarrow \quad (\, M \text{ hält nicht auf } w \,) \text{ oder } (\, M \text{ verwirft } w \,).$$

Vorlesung BuK im WS 22/23, M. Grohe Seite 158 Version 26. Oktober 2022

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
w \in \overline{D} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w. \\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ und } U \text{ akzeptieren } \langle M \rangle w. \\
&\Rightarrow \quad M_{\overline{D}} \text{ akzeptiert } w.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w \notin \overline{D} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht.} \\
&\Rightarrow \quad (\, M \text{ hält nicht auf } w\,) \text{ oder } (\, M \text{ verwirft } w\,). \\
&\Rightarrow \quad (\, M_H \text{ verwirft } \langle M \rangle w\,) \text{ oder} \\
&\qquad\quad (\, M_H \text{ akzeptiert und } U \text{ verwirft } \langle M \rangle w\,).
\end{aligned}
$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Nehmen wir an, $w = \langle M \rangle$ für eine TM M.

Sonst $w \notin \overline{D}$ und $M_{\overline{D}}$ verwirft D.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
w \in \overline{D} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w. \\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ und } U \text{ akzeptieren } \langle M \rangle w. \\
&\Rightarrow \quad M_{\overline{D}} \text{ akzeptiert } w.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w \notin \overline{D} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht.} \\
&\Rightarrow \quad (\, M \text{ hält nicht auf } w\,) \text{ oder } (\, M \text{ verwirft } w\,). \\
&\Rightarrow \quad (\, M_H \text{ verwirft } \langle M \rangle w\,) \text{ oder} \\
&\qquad\quad (\, M_H \text{ akzeptiert und } U \text{ verwirft } \langle M \rangle w\,). \\
&\Rightarrow \quad M_{\overline{D}} \text{ verwirft } w.
\end{aligned}
$$

□

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Das spezielle Halteproblem ist definiert als

$$H_\epsilon = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\} .$$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Das spezielle Halteproblem ist definiert als

$$H_\epsilon = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\} .$$

Satz

Das spezielle Halteproblem H_ϵ ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Das spezielle Halteproblem ist definiert als

$$H_\epsilon = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\} \ .$$

Satz

Das spezielle Halteproblem H_ϵ ist unentscheidbar.

Beweis

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik. Aus einer TM M_ϵ, die H_ϵ entscheidet, konstruieren wir eine TM M_H, die das unentscheidbare Halteproblem entscheiden würde.

Unentscheidbark. des speziellen Halteproblems – Beweis

Die TM M_H mit Unterprogramm M_ϵ arbeitet wie folgt:

1) Teste, ob Eingabewort x mit einer Gödelnummer beginnt. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM und $w \in \Sigma^*$ mit $x = \langle M\rangle w$

Unentscheidbark. des speziellen Halteproblems – Beweis

Die TM M_H mit Unterprogramm M_ϵ arbeitet wie folgt:

1) Teste, ob Eingabewort x mit einer Gödelnummer beginnt. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM und $w \in \Sigma^*$ mit $x = \langle M \rangle w$
2) Berechne die Gödelnummer einer TM M_w^* mit den folgenden Eigenschaften:

Unentscheidbark. des speziellen Halteproblems – Beweis

Die TM M_H mit Unterprogramm M_ϵ arbeitet wie folgt:

1) Teste, ob Eingabewort x mit einer Gödelnummer beginnt. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM und $w \in \Sigma^*$ mit $x = \langle M \rangle w$
2) Berechne die Gödelnummer einer TM M_w^* mit den folgenden Eigenschaften:

   - Falls M_w^* die Eingabe ϵ erhält, so schreibt sie das Wort w aufs Band und simuliert die TM M mit der Eingabe w.

Unentscheidbark. des speziellen Halteproblems – Beweis

Die TM M_H mit Unterprogramm M_ϵ arbeitet wie folgt:

1) Teste, ob Eingabewort x mit einer Gödelnummer beginnt. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM und $w \in \Sigma^*$ mit $x = \langle M \rangle w$
2) Berechne die Gödelnummer einer TM M_w^* mit den folgenden Eigenschaften:
   - Falls M_w^* die Eingabe ϵ erhält, so schreibt sie das Wort w aufs Band und simuliert die TM M mit der Eingabe w.
   - Bei anderen Eingaben kann sich M_w^* beliebig verhalten.

Unentscheidbark. des speziellen Halteproblems – Beweis

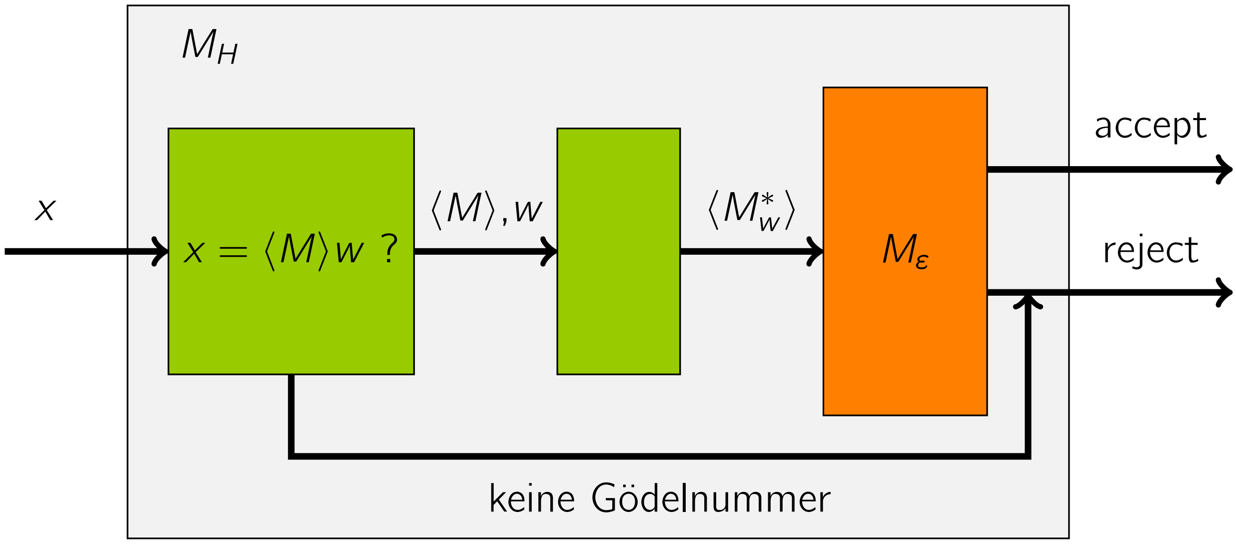
Die TM M_H mit Unterprogramm M_ϵ arbeitet wie folgt:

1) Teste, ob Eingabewort x mit einer Gödelnummer beginnt. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM und $w \in \Sigma^*$ mit $x = \langle M \rangle w$
2) Berechne die Gödelnummer einer TM M_w^* mit den folgenden Eigenschaften:
   - Falls M_w^* die Eingabe ϵ erhält, so schreibt sie das Wort w aufs Band und simuliert die TM M mit der Eingabe w.
   - Bei anderen Eingaben kann sich M_w^* beliebig verhalten.

3) Startet Unterprogramm M_ϵ mit der Eingabe $\langle M_w^* \rangle$ und akzeptiere (verwirfe) genau dann, wenn M_ϵ akzeptiert (verwirft).

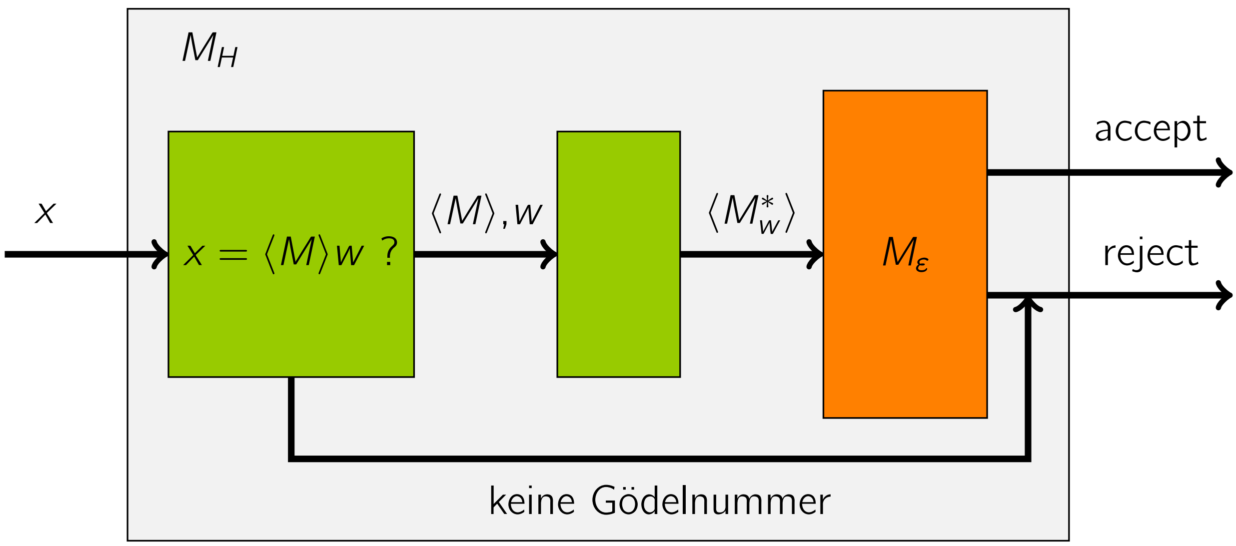
Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Illustration: Aus M_ϵ konstruieren wir M_H.



Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Illustration: Aus M_ϵ konstruieren wir M_H.



Aber die Existenz von M_H steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von H. Damit kann es M_ϵ nicht geben, und das spezielle Halteproblem H_ϵ ist nicht entscheidbar.

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

Wir müssen noch zeigen, dass M_H korrekt arbeitet.

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

Wir müssen noch zeigen, dass M_H korrekt arbeitet.

Falls die Eingabe x nicht von der Form $x = \langle M \rangle w$ ist, so verwirft M_H die Eingabe.

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

Wir müssen noch zeigen, dass M_H korrekt arbeitet.

Falls die Eingabe x nicht von der Form $x = \langle M \rangle w$ ist, so verwirft M_H die Eingabe.

Wir gehen nun davon aus, dass eine Eingabe der Form $x = \langle M \rangle w$ vorliegt.

Für die Korrektheit ist somit noch zu zeigen:

1. $\langle M \rangle w \in H \;\Rightarrow\; M_H$ akzeptiert $\langle M \rangle w$
2. $\langle M \rangle w \notin H \;\Rightarrow\; M_H$ verwirft $\langle M \rangle w$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$\langle M \rangle w \in H \quad \Rightarrow$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$\langle M \rangle w \in H \quad \Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w.$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$\begin{aligned} \langle M \rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w. \\ &\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w. \\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert } \langle M_w^* \rangle.
\end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w. \\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert } \langle M_w^* \rangle. \\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } \langle M \rangle w.
\end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w.\\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon.\\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert } \langle M_w^*\rangle.\\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } \langle M\rangle w.
\end{aligned}$$

$$\langle M\rangle w \notin H$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w.\\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon.\\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert } \langle M_w^*\rangle.\\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } \langle M\rangle w.
\end{aligned}$$

$$\langle M\rangle w \notin H \quad \Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } w.$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$
\begin{aligned}
\langle M \rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w. \\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert } \langle M_w^* \rangle. \\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } \langle M \rangle w.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle M \rangle w \notin H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } w. \\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon.
\end{aligned}
$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$
\begin{aligned}
\langle M \rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w. \\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert } \langle M_w^* \rangle. \\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } \langle M \rangle w.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle M \rangle w \notin H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } w. \\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon. \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ verwirft } \langle M_w^* \rangle.
\end{aligned}
$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$
\begin{aligned}
\langle M\rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w.\\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon.\\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert } \langle M_w^*\rangle.\\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } \langle M\rangle w.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle M\rangle w \notin H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } w.\\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon.\\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ verwirft } \langle M_w^*\rangle.\\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ verwirft } \langle M\rangle w.
\end{aligned}
$$

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems – Beweis

$$
\begin{aligned}
\langle M\rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf Eingabe } w.\\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon.\\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert } \langle M_w^*\rangle.\\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } \langle M\rangle w.
\end{aligned}
$$

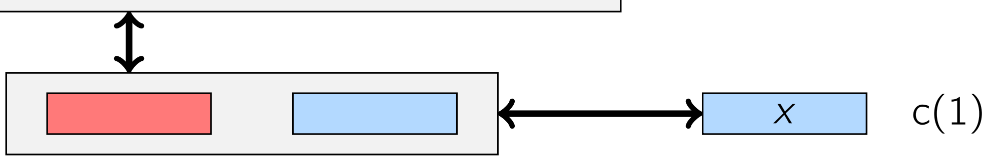
$$
\begin{aligned}
\langle M\rangle w \notin H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } w.\\
&\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon.\\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ verwirft } \langle M_w^*\rangle.\\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ verwirft } \langle M\rangle w.
\end{aligned}
$$

$\square$

Das Collatz-Problem

Das Collatz-Problem

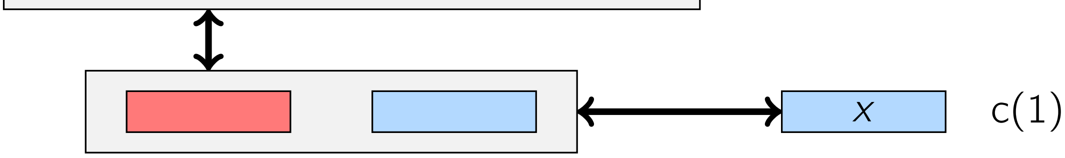
1: LOAD 1
2: IF $c(0) > 1$ THEN GOTO 4
3: END
4: CADD 1
5: CDIV 2
6: CMULT 2
7: SUB 1
8: IF $c(0) > 0$ THEN GOTO 13
9: LOAD 1
10: CDIV 2
11: STORE 1
12: GOTO 1
13: LOAD 1
14: CMULT 3
15: ADD 1
16: GOTO 1



Das Collatz-Problem

```
1:   LOAD 1
2:   IF c(0) > 1 THEN GOTO 4
3:   END
4:   CADD 1
5:   CDIV 2
6:   CMULT 2
7:   SUB 1
8:   IF c(0) > 0 THEN GOTO 13
9:   LOAD 1
10:  CDIV 2
11:  STORE 1
12:  GOTO 1
13:  LOAD 1
14:  CMULT 3
15:  ADD 1
16:  GOTO 1
```

$$x \leftarrow \begin{cases} x/2 & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$



Das Collatz-Problem

$$x \leftarrow \begin{cases} x/2 & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Collatz-Problem

$$x \leftarrow \begin{cases} x/2 & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dieser Iterationsgleichung erhält man z.B. die Zahlenfolgen

- 1, 4, 2, 1, ...

Das Collatz-Problem

$$x \leftarrow \begin{cases} x/2 & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dieser Iterationsgleichung erhält man z.B. die Zahlenfolgen

- 1, 4, 2, 1, ...
- 2, 1, 4, 2, 1,...

Das Collatz-Problem

$$x \leftarrow \begin{cases} x/2 & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dieser Iterationsgleichung erhält man z.B. die Zahlenfolgen

- 1, 4, 2, 1, ...
- 2, 1, 4, 2, 1,...
- 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Das Collatz-Problem

$$x \leftarrow \begin{cases} x/2 & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dieser Iterationsgleichung erhält man z.B. die Zahlenfolgen

- 1, 4, 2, 1, ...
- 2, 1, 4, 2, 1,...
- 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1

Das Collatz-Problem

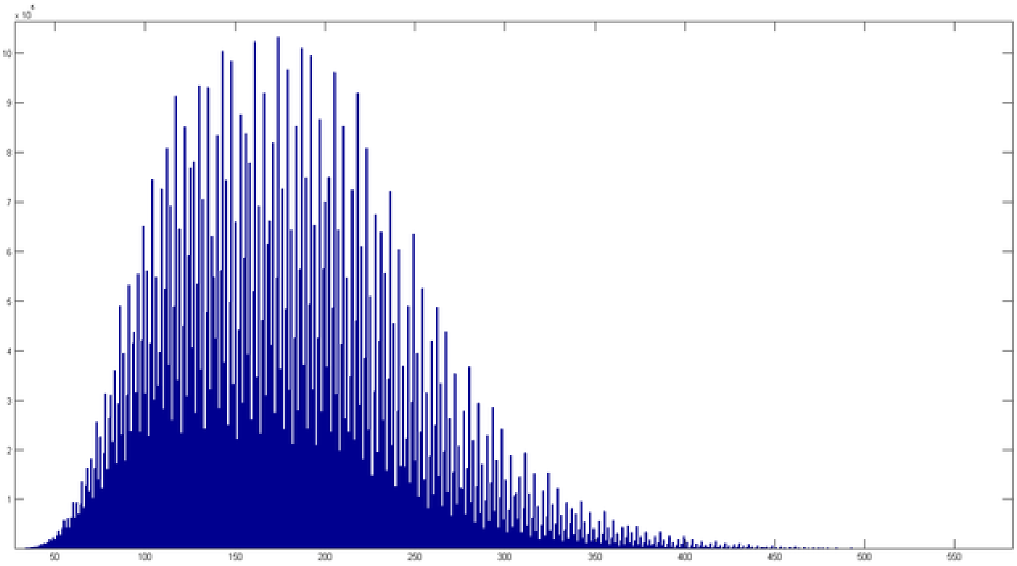
$$x \leftarrow \begin{cases} x/2 & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dieser Iterationsgleichung erhält man z.B. die Zahlenfolgen

- 1, 4, 2, 1, . . .
- 2, 1, 4, 2, 1,. . .
- 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, . . .
- 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1
- 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1

Offene Frage:
Es ist unbekannt ob obige Registermaschine auf allen Eingaben hält.

Statistik der Zahlenfolgenlängen



Zahlenfolgenlängen bei Eingaben bis 100 Millionen.