Vorlesung 9
Allgemeines Halteproblem und Hilberts 10. Problem

Wdh.: Semi-Entscheidbarkeit

Eine Sprache L wird von einer TM M erkannt, wenn

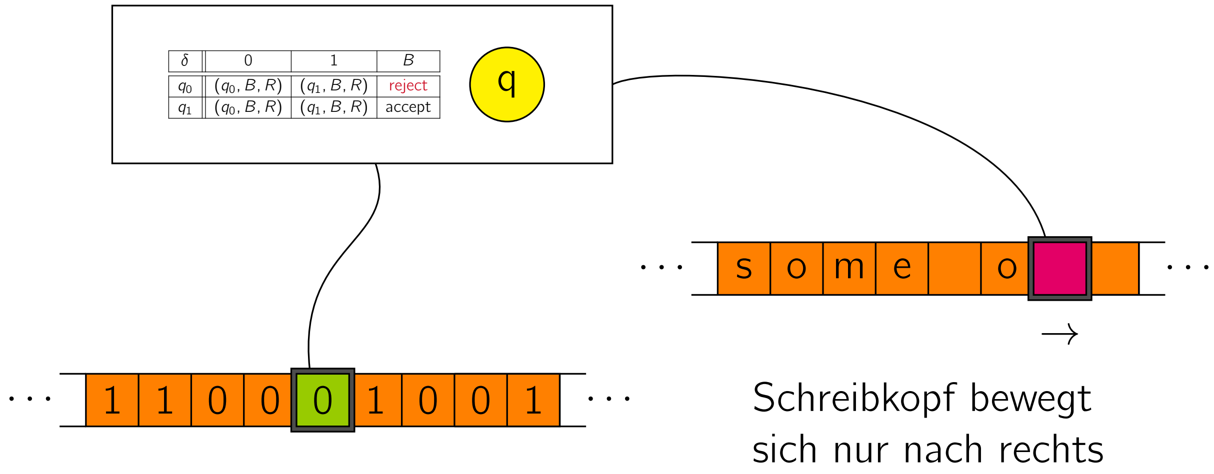
- M jedes Wort aus L akzeptiert, und
- M kein Wort akzeptiert, das nicht in L enthalten ist.

Es ist $L(M)$ die von M erkannte Sprache.

Definition
Eine Sprache L, für die eine TM existiert, die L erkennt, wird als semi-entscheidbar bezeichnet.

Beobachtung
Das Halteproblem ist semi-entscheidbar.

Wdh.: Aufzähler



Wdh.: rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Wdh.: rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweisrichtung „⇒“: Vorhanden ist eine TM M, die L erkennt.

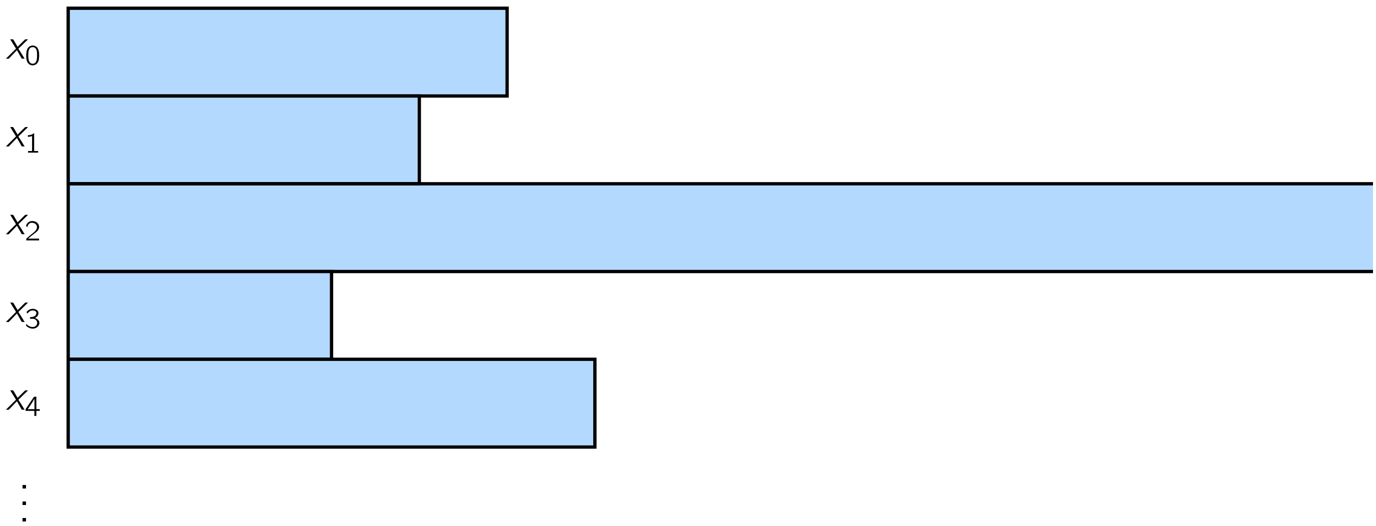
Wdh.: rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweisrichtung „⇒“: Vorhanden ist eine TM M, die L erkennt.

Anzahl der Schritte, die M auf x_i benötigt.



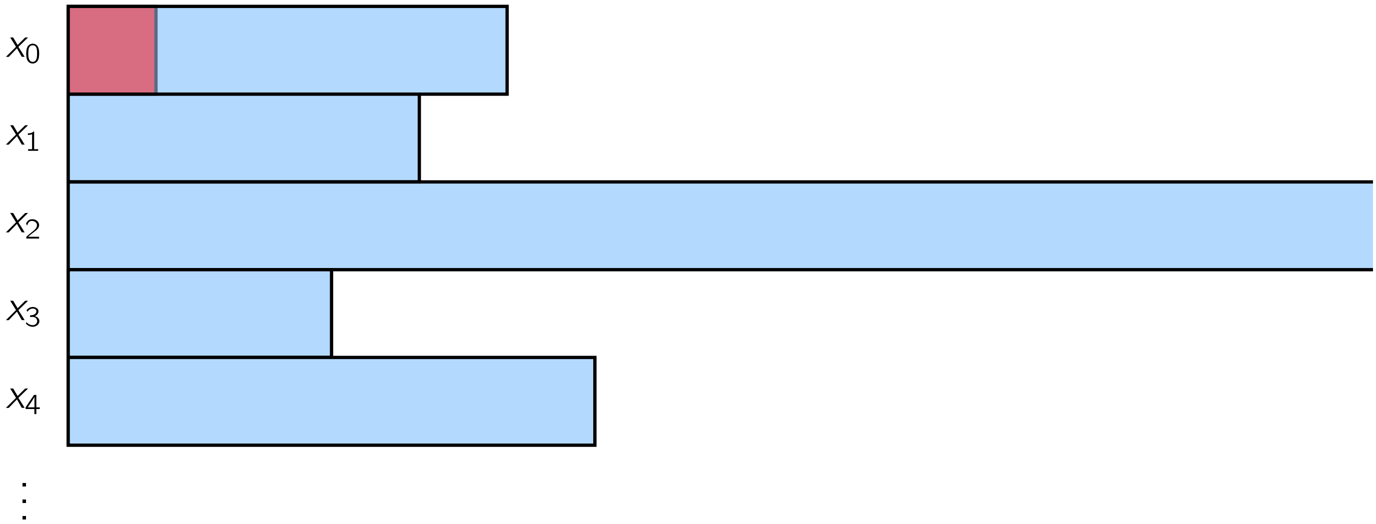
Wdh.: rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweisrichtung „⇒“: Vorhanden ist eine TM M, die L erkennt.

Anzahl der Schritte, die M auf x_i benötigt.



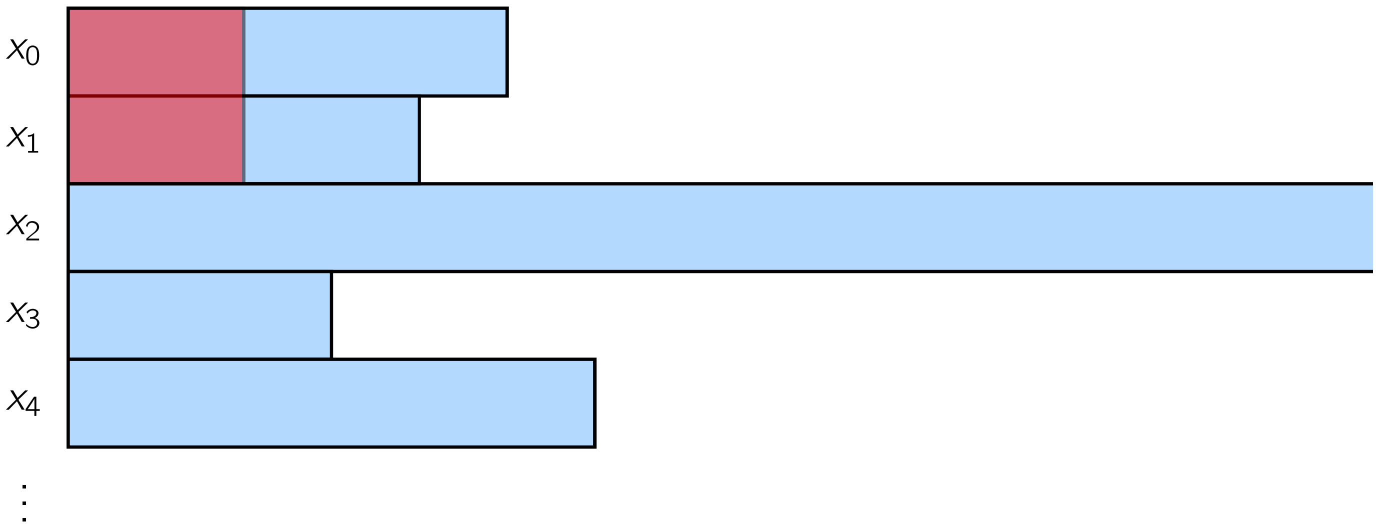
Wdh.: rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweisrichtung „⇒“: Vorhanden ist eine TM M, die L erkennt.

Anzahl der Schritte, die M auf x_i benötigt.



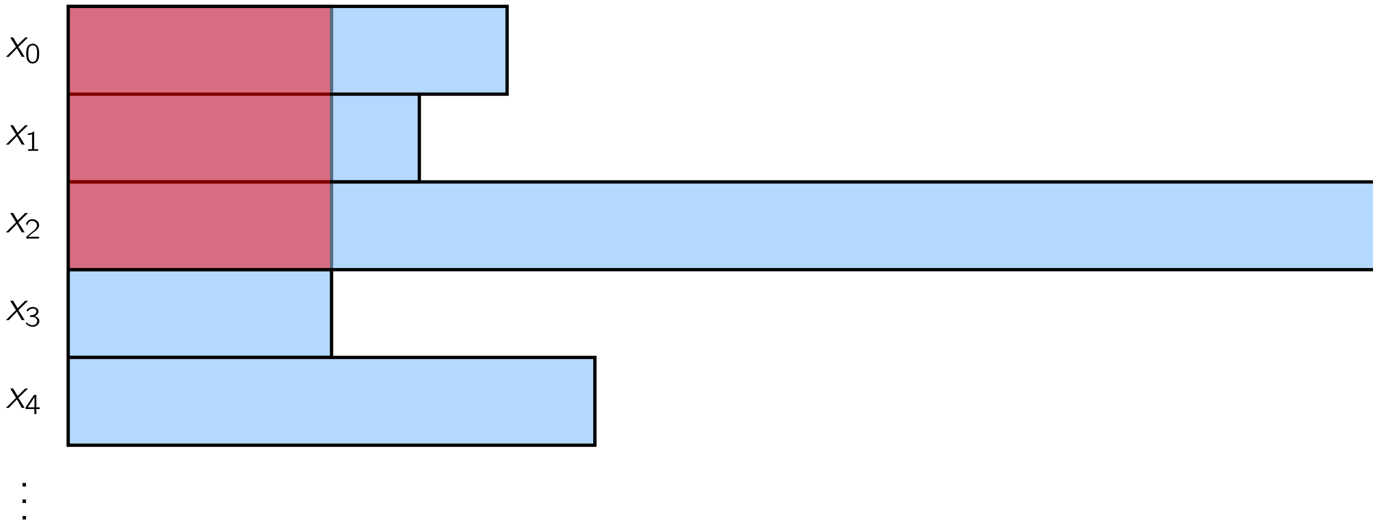
Wdh.: rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweisrichtung „$\Rightarrow$“: Vorhanden ist eine TM M, die L erkennt.

Anzahl der Schritte, die M auf x_i benötigt.



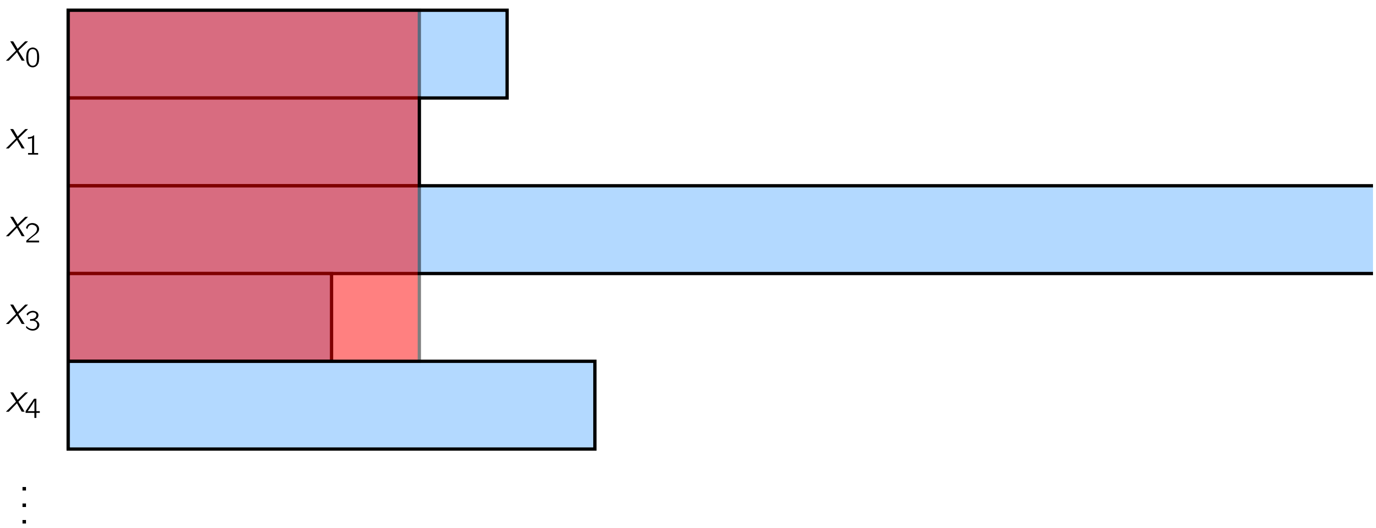
Wdh.: rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweisrichtung „$\Rightarrow$“: Vorhanden ist eine TM M, die L erkennt.

Anzahl der Schritte, die M auf x_i benötigt.



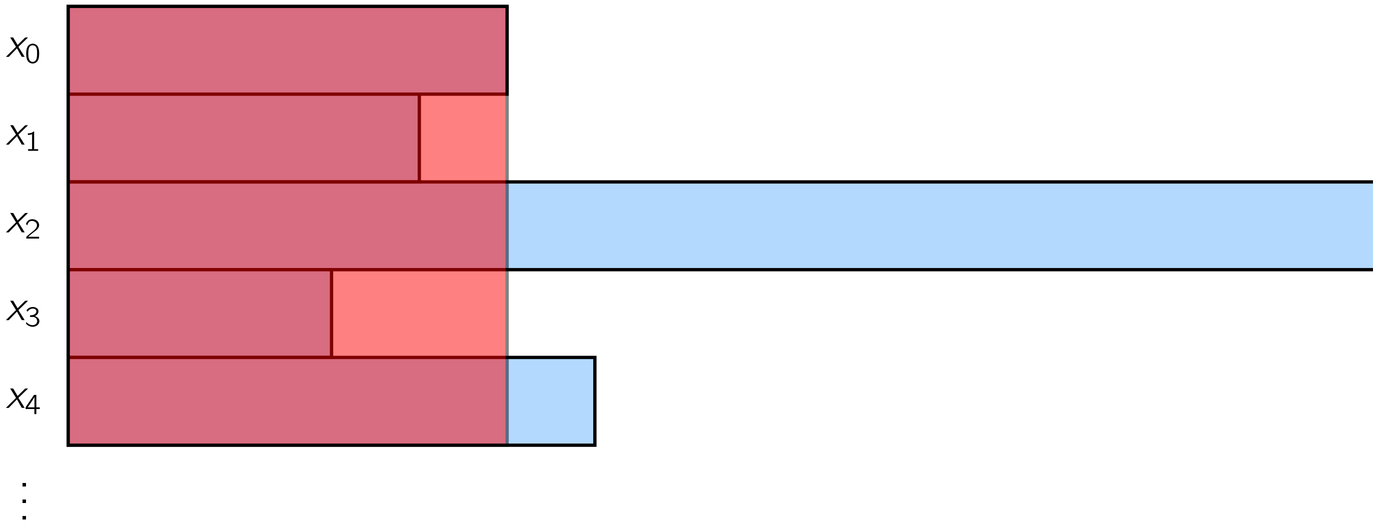
Wdh.: rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweisrichtung „⇒“: Vorhanden ist eine TM M, die L erkennt.

Anzahl der Schritte, die M auf x_i benötigt.



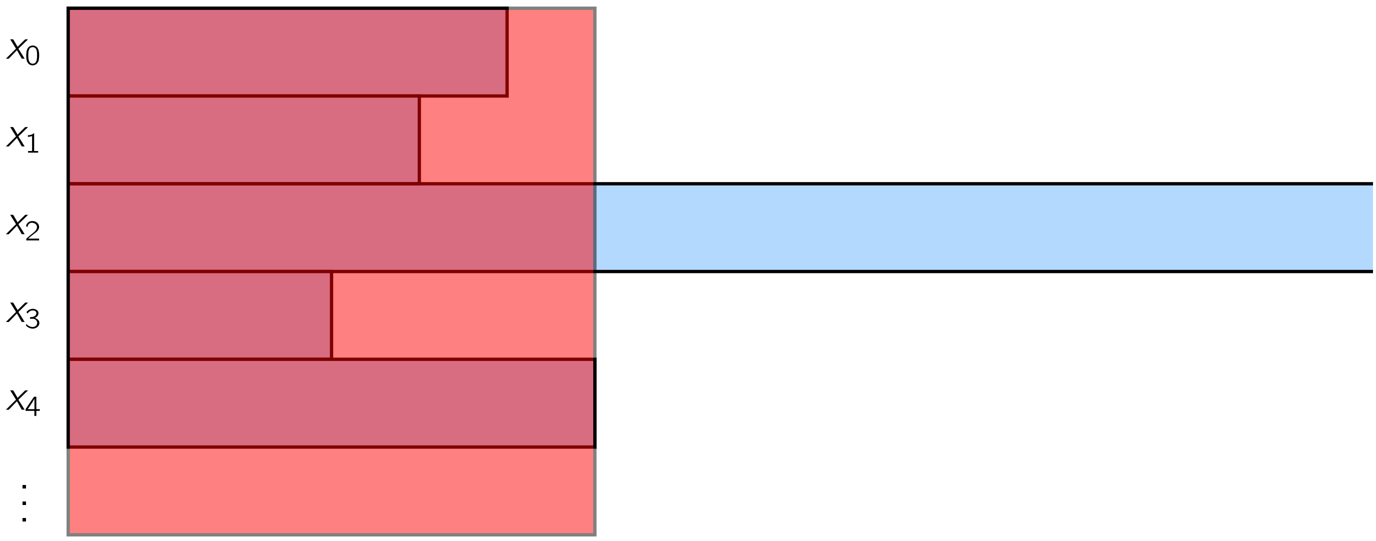
Wdh.: rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweisrichtung „⇒“: Vorhanden ist eine TM M, die L erkennt.

Anzahl der Schritte, die M auf x_i benötigt.



Wdh.: Abschlusseigenschaften von Sprachen

Wdh.: Abschlusseigenschaften von Sprachen

Satz

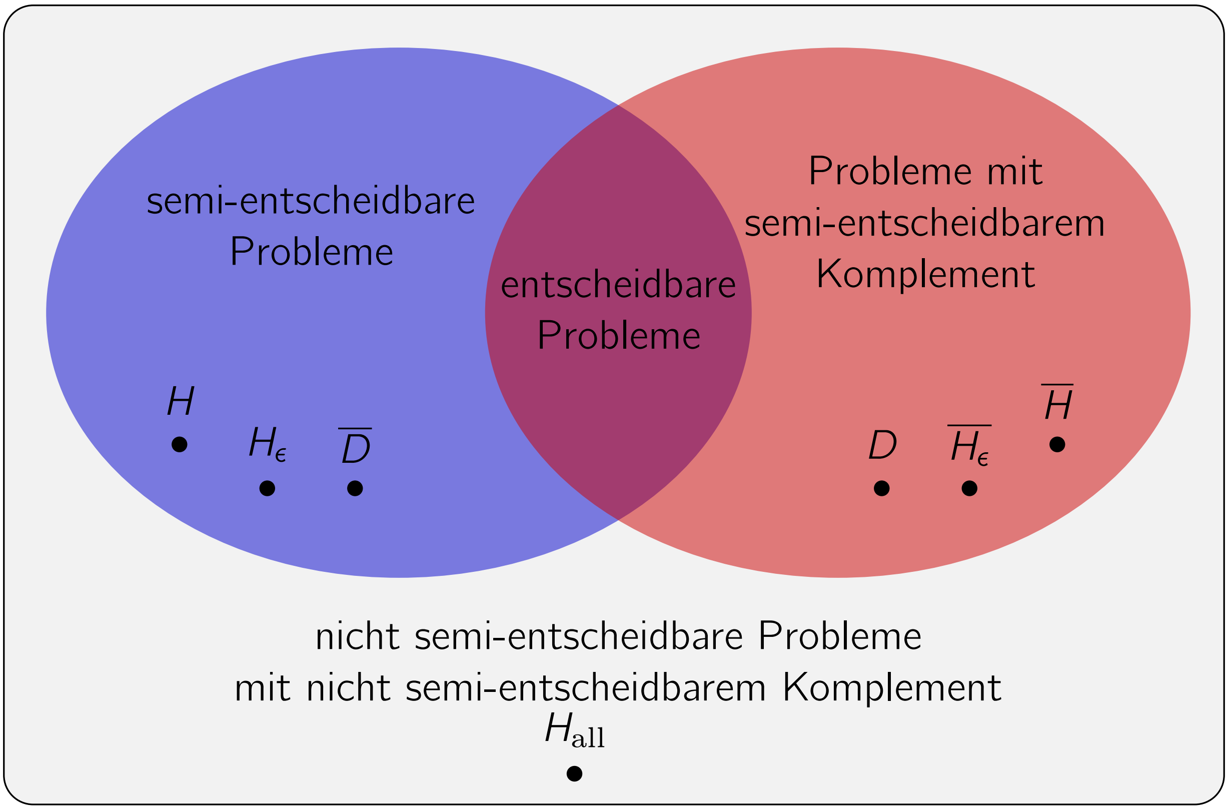
Die Menge der entscheidbaren Sprachen ist abgeschlossen unter Komplementbildung, Vereinigungen und Schnitten.

Satz

Die Menge der semi-entscheidbaren Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigungen und Schnitten.
Sie ist nicht abgeschlossen unter Komplementbildung.

Vorlesung BuK im WS 22/23, M. Grohe Seite 224 Version 2. November 2022

Wdh.: Berechenbarkeitslandschaft



Wdh.: Allgemeines Halteproblem

Das allgemeine Halteproblem ist definiert als

$$H_{\text{all}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\}$$

Wie kann man nachweisen, dass sowohl H_{all} als auch $\overline{H_{\text{all}}}$ nicht semi-entscheidbar sind?

Wdh.: Allgemeines Halteproblem

Das allgemeine Halteproblem ist definiert als

$$H_{\text{all}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\}$$

Wie kann man nachweisen, dass sowohl H_{all} als auch $\overline{H}_{\text{all}}$ nicht semi-entscheidbar sind?

Wir verwenden Reduktionen, eine spezielle Variante der Unterprgrammtechnik.

Wdh.: Reduktionen

Definition

Es seien L_1 und L_2 Sprachen über einem Alphabet Σ. Dann heißt L_1 auf L_2 reduzierbar, Notation $L_1 \leq L_2$, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

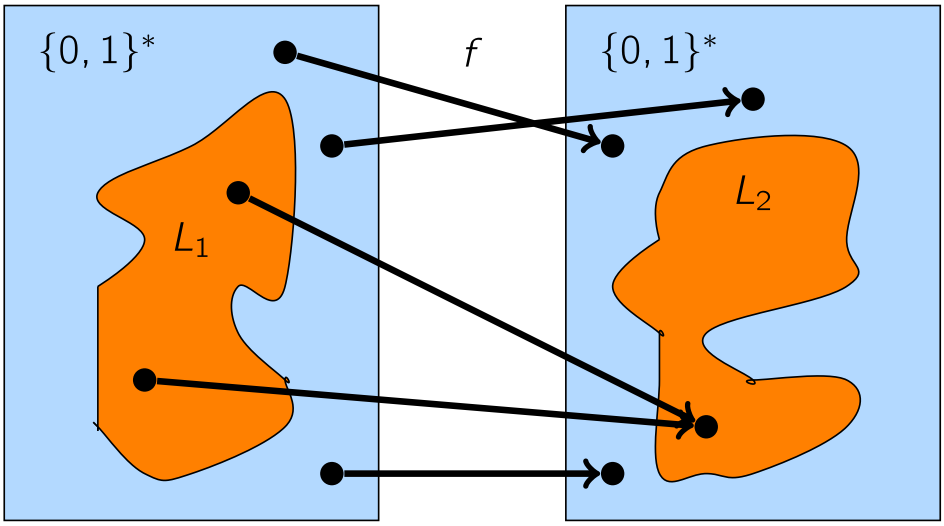
$$x \in L_1 \;\Leftrightarrow\; f(x) \in L_2\ .$$

Wdh.: Reduktionen

Definition

Es seien L_1 und L_2 Sprachen über einem Alphabet Σ. Dann heißt L_1 auf L_2 reduzierbar, Notation $L_1 \leq L_2$, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in L_1 \;\Leftrightarrow\; f(x) \in L_2 \;.$$



Wdh.: Reduktionen

Wir haben gezeigt:

Lemma

Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 semi-entscheidbar ist, so ist L_1 semi-entscheidbar.

Wdh.: Reduktionen

Wir haben gezeigt:

Lemma

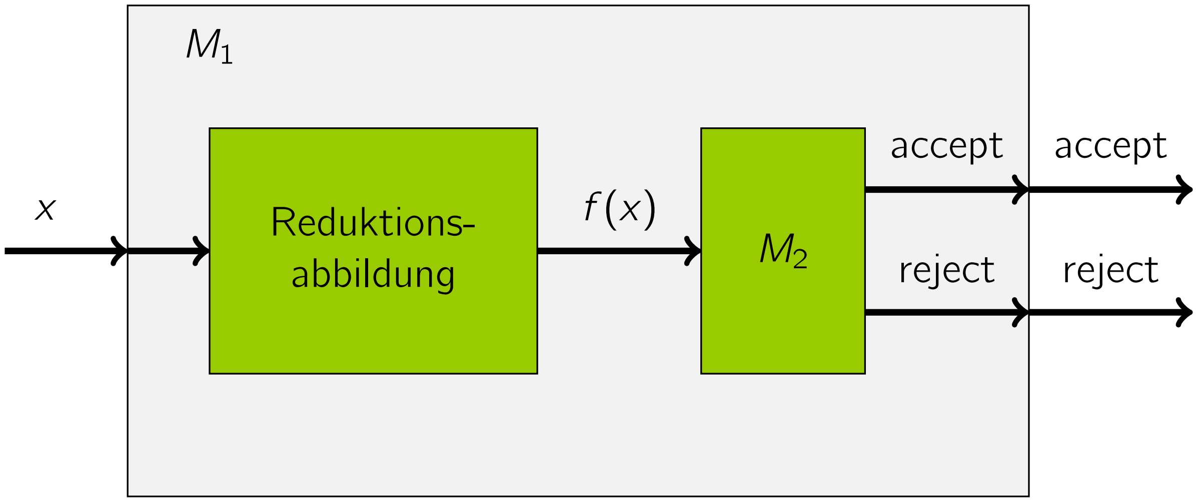
Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 semi-entscheidbar ist, so ist L_1 semi-entscheidbar.

Im Umkehrschluss gilt:

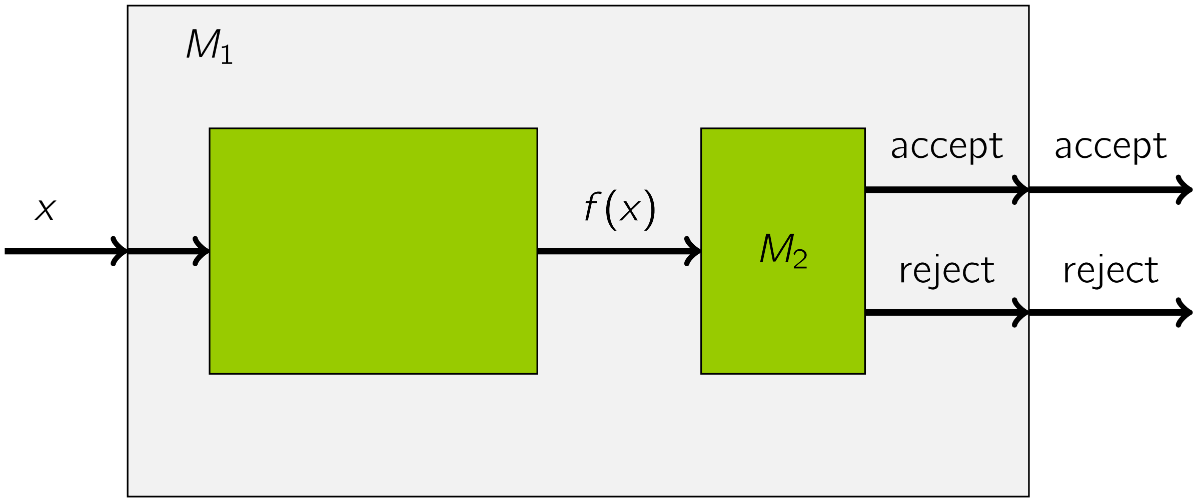
Lemma

Falls $L_1 \leq L_2$ und L_1 nicht semi-entscheidbar ist, so ist L_2 nicht semi-entscheidbar.

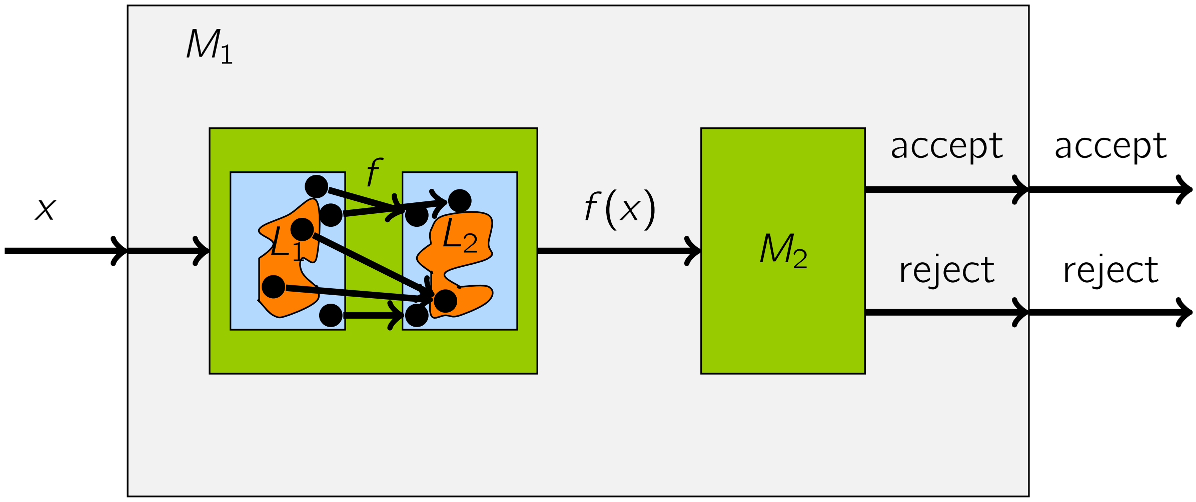
Wdh.: Reduktionen



Wdh.: Reduktionen



Wdh.: Reduktionen



Vorlesung BuK im WS 22/23, M. Grohe Seite 229 Version 2. November 2022

Anwendung

Vorbeobachtung: H_ϵ ist unentscheidbar, aber semi-entscheidbar. Folglich ist $\overline{H_\epsilon}$ nicht semi-entscheidbar.

Anwendung

Vorbeobachtung: H_ϵ ist unentscheidbar, aber semi-entscheidbar. Folglich ist $\overline{H_\epsilon}$ nicht semi-entscheidbar.

Wir zeigen nun

Behauptung A

$$\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$$

Behauptung B

$$\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$$

Anwendung

Vorbeobachtung: H_ϵ ist unentscheidbar, aber semi-entscheidbar. Folglich ist $\overline{H_\epsilon}$ nicht semi-entscheidbar.

Wir zeigen nun

Behauptung A

$$\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$$

Behauptung B

$$\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$$

Aus diesen Reduktionen folgt:

Satz

Weder $\overline{H_{all}}$ noch H_{all} sind semi-entscheidbar.

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$

Zur Durchführung der Reduktion gehen wir in zwei Schritten vor:

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$

Zur Durchführung der Reduktion gehen wir in zwei Schritten vor:

1) Wir beschreiben eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\overline{H_\epsilon}$ auf Ja-Instanzen von $\overline{H_{\text{all}}}$ und Nein-Instanzen von $\overline{H_\epsilon}$ auf Nein-Instanzen von $\overline{H_{\text{all}}}$ abbildet.

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$

Zur Durchführung der Reduktion gehen wir in zwei Schritten vor:

1) Wir beschreiben eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\overline{H_\epsilon}$ auf Ja-Instanzen von $\overline{H_{\text{all}}}$ und Nein-Instanzen von $\overline{H_\epsilon}$ auf Nein-Instanzen von $\overline{H_{\text{all}}}$ abbildet.

2) Für die Korrektheit zeigen wir:
   a) $w \notin \overline{H_\epsilon} \;\Rightarrow\; f(w) \notin \overline{H_{\text{all}}}$
   b) $w \in \overline{H_\epsilon} \;\Rightarrow\; f(w) \in \overline{H_{\text{all}}}$

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$

Beschreibung der Funktion f:

Sei w die Eingabe für $\overline{H_\epsilon}$.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$

Beschreibung der Funktion f:

Sei w die Eingabe für $\overline{H_\epsilon}$.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M_ϵ^* mit der folgenden Eigenschaft:

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$

Beschreibung der Funktion f:

Sei w die Eingabe für $\overline{H_\epsilon}$.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M_ϵ^* mit der folgenden Eigenschaft:

M_ϵ^* ignoriert die Eingabe und simuliert M mit der Eingabe ϵ.

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$

Beschreibung der Funktion f:

Sei w die Eingabe für $\overline{H_\epsilon}$.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M_ϵ^* mit der folgenden Eigenschaft:

M_ϵ^* ignoriert die Eingabe und simuliert M mit der Eingabe ϵ.

Die Funktion f ist berechenbar. (Warum?)

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Korrektheit:

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) \in \overline{H_{\text{all}}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Korrektheit:

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) \in \overline{H_{\text{all}}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

Es gilt

$$w \notin \overline{H_\epsilon} \quad \Rightarrow \quad w \in H_\epsilon$$

Vorlesung BuK im WS 22/23, M. Grohe Seite 233 Version 2. November 2022

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Korrektheit:

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) \in \overline{H_{\text{all}}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \overline{H_\epsilon} &\Rightarrow w \in H_\epsilon \\ &\Rightarrow M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Korrektheit:

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) \in \overline{H_{\text{all}}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \overline{H_\epsilon} &\Rightarrow w \in H_\epsilon \\ &\Rightarrow M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe.} \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Korrektheit:

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) \in \overline{H_{\text{all}}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad w \in H_\epsilon \\ &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe.} \\ &\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \in H_{\text{all}} \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Korrektheit:

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) \in \overline{H_{\text{all}}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad w \in H_\epsilon \\ &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe.} \\ &\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \in H_{\text{all}} \\ &\Rightarrow \quad f(w) \notin \overline{H_{\text{all}}}. \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Es sei weiter $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Es sei weiter $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

$$w \in \overline{H_\epsilon} \quad \Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon.$$

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Es sei weiter $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

$$\begin{aligned} w \in \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf keiner Eingabe.} \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Es sei weiter $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

$$\begin{aligned} w \in \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf keiner Eingabe.} \\ &\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \notin H_{\text{all}} \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Es sei weiter $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M^*_\epsilon \rangle$.

$$\begin{aligned} w \in \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad M^*_\epsilon \text{ hält auf keiner Eingabe.} \\ &\Rightarrow \quad \langle M^*_\epsilon \rangle \notin H_{\text{all}} \\ &\Rightarrow \quad f(w) \in \overline{H_{\text{all}}} \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\overline{H_\epsilon} \leq \overline{H_{\text{all}}}$ — Korrektheit

Es sei weiter $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M^*_\epsilon \rangle$.

$$\begin{aligned} w \in \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad M^*_\epsilon \text{ hält auf keiner Eingabe.} \\ &\Rightarrow \quad \langle M^*_\epsilon \rangle \notin H_{\text{all}} \\ &\Rightarrow \quad f(w) \in \overline{H_{\text{all}}} \end{aligned}$$

Also gilt $w \in \overline{H_\epsilon} \;\Leftrightarrow\; f(w) \in \overline{H_{\text{all}}}$ und somit ist die Funktion f korrekt konstruiert.

$\square$

Daher ist $\overline{H_{\text{all}}}$ nicht semi-entscheidbar.

Beweis von Behauptung B: $\overline{H}_\epsilon \leq H_{\mathrm{all}}$

Beweis von Behauptung B: $\overline{H}_\epsilon \leq H_{\mathrm{all}}$

Wir gehen wiederum in zwei Schritten vor:

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Wir gehen wiederum in zwei Schritten vor:

1) Wir beschreiben eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\overline{H_\epsilon}$ auf Ja-Instanzen von H_{all} und Nein-Instanzen von $\overline{H_\epsilon}$ auf Nein-Instanzen von H_{all} abbildet.

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Wir gehen wiederum in zwei Schritten vor:

1) Wir beschreiben eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\overline{H_\epsilon}$ auf Ja-Instanzen von H_{all} und Nein-Instanzen von $\overline{H_\epsilon}$ auf Nein-Instanzen von H_{all} abbildet.

2) Für die Korrektheit zeigen wir:
   a) $w \notin \overline{H_\epsilon} \;\Rightarrow\; f(w) \notin H_{\text{all}}$
   b) $w \in \overline{H_\epsilon} \;\Rightarrow\; f(w) \in H_{\text{all}}$

Vorlesung BuK im WS 22/23, M. Grohe Seite 235 Version 2. November 2022

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Beschreibung der Funktion f:

Sei w die Eingabe für $\overline{H_\epsilon}$. Sei w' irgendein Wort aus H_{all}.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w'$.

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Beschreibung der Funktion f:

Sei w die Eingabe für $\overline{H_\epsilon}$. Sei w' irgendein Wort aus H_{all}.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w'$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M', die sich auf Eingaben der Länge i wie folgt verhält:

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Beschreibung der Funktion f:

Sei w die Eingabe für $\overline{H_\epsilon}$. Sei w' irgendein Wort aus H_{all}.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w'$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M', die sich auf Eingaben der Länge i wie folgt verhält:

M' simuliert die ersten i Schritte von M auf der Eingabe ϵ. Wenn M innerhalb dieser i Schritte hält, dann geht M' in eine Endlosschleife, ansonsten hält M'.

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Beschreibung der Funktion f:

Sei w die Eingabe für $\overline{H_\epsilon}$. Sei w' irgendein Wort aus H_{all}.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w'$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M', die sich auf Eingaben der Länge i wie folgt verhält:

M' simuliert die ersten i Schritte von M auf der Eingabe ϵ. Wenn M innerhalb dieser i Schritte hält, dann geht M' in eine Endlosschleife, ansonsten hält M'.

Die Funktion f ist berechenbar. (Warum?)

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Korrektheit

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) = w' \in H_{\text{all}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M' \rangle$.

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Korrektheit

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) = w' \in H_{\text{all}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M' \rangle$.

Es gilt

$$w \notin \overline{H_\epsilon} \quad \Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon.$$

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Korrektheit

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) = w' \in H_{\text{all}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M' \rangle$.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon. \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Korrektheit

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) = w' \in H_{\text{all}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M' \rangle$.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M' \text{ hält auf keiner Eingabe der Länge mindestens } i. \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Korrektheit

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) = w' \in H_{\text{all}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M' \rangle$.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M' \text{ hält auf keiner Eingabe der Länge mindestens } i. \\ &\Rightarrow \quad M' \text{ hält nicht auf jeder Eingabe.} \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

Korrektheit

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \overline{H_\epsilon}$ und $f(w) = w' \in H_{\text{all}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M' \rangle$.

Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon. \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M' \text{ hält auf keiner Eingabe der Länge mindestens } i. \\ &\Rightarrow \quad M' \text{ hält nicht auf jeder Eingabe.} \\ &\Rightarrow \quad f(w) = \langle M' \rangle \notin H_{\text{all}} \end{aligned}$$

Vorlesung BuK im WS 22/23, M. Grohe Seite 237 Version 2. November 2022

Beweis von Behauptung B: $\overline{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$

$$w \in \overline{H}_\epsilon \quad \Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon$$

Beweis von Behauptung B: $\overline{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$

$$\begin{aligned} w \in \overline{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \neg\exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \forall i\colon M \text{ hält nicht innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

$$
\begin{aligned}
w \in \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \neg\exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M \text{ hält nicht innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M' \text{ hält auf allen Eingaben der Länge } i
\end{aligned}
$$

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

$$
\begin{aligned}
w \in \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \neg\exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M \text{ hält nicht innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M' \text{ hält auf allen Eingaben der Länge } i \\
&\Rightarrow \quad M' \text{ hält auf jeder Eingabe}
\end{aligned}
$$

Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

$$\begin{aligned}
w \in \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \neg\exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M \text{ hält nicht innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M' \text{ hält auf allen Eingaben der Länge } i \\
&\Rightarrow \quad M' \text{ hält auf jeder Eingabe} \\
&\Rightarrow \quad f(w) = \langle M' \rangle \in H_{\text{all}} \ .
\end{aligned}$$

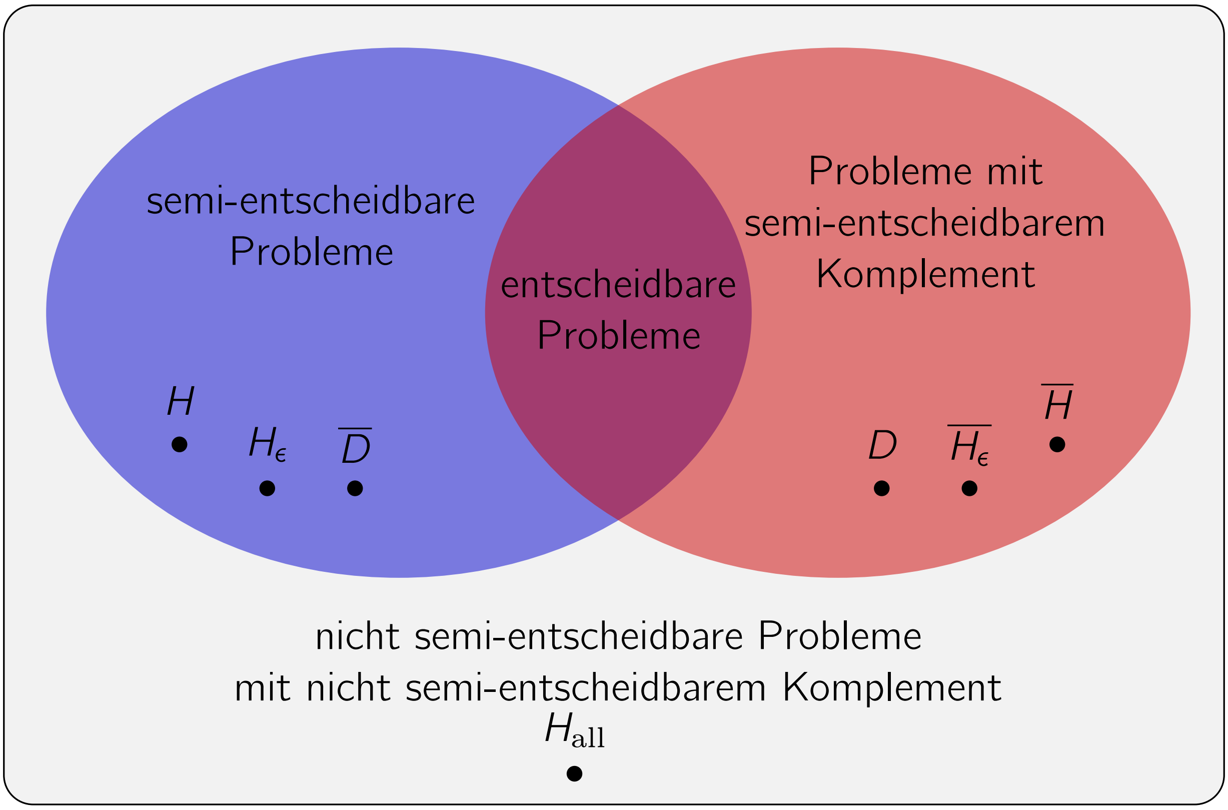
Beweis von Behauptung B: $\overline{H_\epsilon} \leq H_{\text{all}}$

$$\begin{aligned}
w \in \overline{H_\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \neg\exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M \text{ hält nicht innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M' \text{ hält auf allen Eingaben der Länge } i \\
&\Rightarrow \quad M' \text{ hält auf jeder Eingabe} \\
&\Rightarrow \quad f(w) = \langle M' \rangle \in H_{\text{all}} \ .
\end{aligned}$$

Also gilt $w \in \overline{H_\epsilon} \;\Leftrightarrow\; f(w) \in H_{\text{all}}$ und somit ist die Funktion f korrekt konstruiert. $\square$

Es folgt, dass H_{all} nicht semi-entscheidbar ist.

Berechenbarkeitslandschaft



Anmerkung zu Reduktionen

Es gilt übrigens auch

Lemma
Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 entscheidbar ist, so ist L_1 entscheidbar.

Oder umgekehrt:

Lemma
Falls $L_1 \leq L_2$ und L_1 unentscheidbar ist, so ist L_2 unentscheidbar.

Beweis: analog zur Semientscheidbarkeit. □

Hilberts zehntes Problem

Im Jahr 1900 präsentierte der Mathematiker David Hilbert 23 mathematische Probleme auf einem Kongress in Paris.

Hilberts zehntes Problem

Im Jahr 1900 präsentierte der Mathematiker David Hilbert 23 mathematische Probleme auf einem Kongress in Paris.

Hilberts zehntes Problem (im Originalwortlaut)

Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sei vorgelegt: *Man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in den ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

Hilberts zehntes Problem

Im Jahr 1900 präsentierte der Mathematiker David Hilbert 23 mathematische Probleme auf einem Kongress in Paris.

Hilberts zehntes Problem (im Originalwortlaut)

Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sei vorgelegt: *Man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in den ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

Die „ganzen rationalen Zahlen“, von denen in diesem Problem die Rede ist, sind die Zahlen aus $\mathbb{Z}$, wie wir sie kennen.

„Diophantische Gleichungen“ bezeichnen Gleichungen über Polynomen in mehreren Variablen.

Diophantische Gleichungen

- Ein Term ist ein Produkt aus Variablen mit einem konstanten Koeffizienten, z.B. ist

  $$6 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z \text{ bzw. } 6x^3yz^2$$

  ein Term über den Variablen x, y, z mit dem Koeffizienten 6.

Diophantische Gleichungen

- Ein Term ist ein Produkt aus Variablen mit einem konstanten Koeffizienten, z.B. ist

$$6 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z \text{ bzw. } 6x^3yz^2$$

ein Term über den Variablen x, y, z mit dem Koeffizienten 6.

- Ein Polynom ist eine Summe von Termen, z.B.

$$6x^3yz^2 + 3xy^2 - x^3 - 10.$$

Diophantische Gleichungen

- Ein Term ist ein Produkt aus Variablen mit einem konstanten Koeffizienten, z.B. ist

$$6 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z \text{ bzw. } 6x^3yz^2$$

ein Term über den Variablen x, y, z mit dem Koeffizienten 6.

- Ein Polynom ist eine Summe von Termen, z.B.

$$6x^3yz^2 + 3xy^2 - x^3 - 10.$$

- Eine diophantische Gleichung setzt ein Polynom gleich Null. Die Lösungen der Gleichung entsprechen also den Nullstellen des Polynoms. Obiges Polynom hat beispielsweise die Nullstelle

$$(x, y, z) = (5, 3, 0)\ .$$

Diophantische Gleichungen – Beispiele

Beispiele

- Quadratische Gleichung $5x^2 - 3x + 6 = 0$. Lösbar mit diversen Methoden. (Quadratische Ergänzung, Lösungsformel, ...) Also kann man auch feststellen, ob die Gleichung ganzzahlige Lösungen hat.
- Fermatsche Gleichung $x^n + y^n - z^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Hat eine ganzzahlige positive Lösung nur, wenn $n \leq 2$. (Satz von Wiles, Fermats letzter Satz.)
- Hat die Gleichung $x^4 + y^6x^2 - z^7 + xy - x = 0$ eine ganzzahlige Lösung?

Formulierung als Entscheidungsproblem

Hilberts zehntes Problem (in unseren Worten)

Beschreibe einen Algorithmus, der entscheidet, ob ein gegebenes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle hat.

Formulierung als Entscheidungsproblem

Hilberts zehntes Problem (in unseren Worten)

Beschreibe einen Algorithmus, der entscheidet, ob ein gegebenes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle hat.

Die diesem Entscheidungsproblem zugrundeliegende Sprache ist

$$N = \{\, p \mid p \text{ ist ein Polynom mit einer ganzzahligen Nullstelle} \} \ .$$

Semientscheidbarkeit von N

Gegeben sei ein Polynom p mit ℓ Variablen.

Der Wertebereich von p entspricht der abzählbar unendlichen Menge $\mathbb{Z}^\ell$.

Semientscheidbarkeit von N

Gegeben sei ein Polynom p mit ℓ Variablen.

Der Wertebereich von p entspricht der abzählbar unendlichen Menge $\mathbb{Z}^\ell$.

Der folgende Algorithmus erkennt N:

- Zähle die ℓ-Tupel aus $\mathbb{Z}^\ell$ in kanonischer Reihenfolge auf und werte p für jedes dieser Tupel aus.
- Akzeptiere, sobald eine der Auswertungen den Wert 0 ergibt.

Semientscheidbarkeit von N

Gegeben sei ein Polynom p mit ℓ Variablen.

Der Wertebereich von p entspricht der abzählbar unendlichen Menge $\mathbb{Z}^\ell$.

Der folgende Algorithmus erkennt N:

- Zähle die ℓ-Tupel aus $\mathbb{Z}^\ell$ in kanonischer Reihenfolge auf und werte p für jedes dieser Tupel aus.
- Akzeptiere, sobald eine der Auswertungen den Wert 0 ergibt.

Fazit: N ist semi-entscheidbar.

Ist N entscheidbar? – Diskussion

- Falls wir eine obere Schranke für die Absolutwerte der Nullstellen hätten, so bräuchten wir nur eine endliche Menge von ℓ-Tupeln aufzählen und N wäre somit entscheidbar.

Ist N entscheidbar? – Diskussion

- Falls wir eine obere Schranke für die Absolutwerte der Nullstellen hätten, so bräuchten wir nur eine endliche Menge von ℓ-Tupeln aufzählen und N wäre somit entscheidbar.
- Für Polynome über nur einer Variablen gibt es tatsächlich eine obere Schranke: Für ein Polynom der Form

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten gilt

$$p(x) = 0, x \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x \text{ teilt } a_0. \text{ (Warum?)}$$

Also gibt es keine Nullstelle mit Absolutwert größer als $|a_0|$.

Ist N entscheidbar? – Diskussion

- Falls wir eine obere Schranke für die Absolutwerte der Nullstellen hätten, so bräuchten wir nur eine endliche Menge von ℓ-Tupeln aufzählen und N wäre somit entscheidbar.
- Für Polynome über nur einer Variablen gibt es tatsächlich eine obere Schranke: Für ein Polynom der Form

  $$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

  mit ganzzahligen Koeffizienten gilt

  $$p(x) = 0, x \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x \text{ teilt } a_0. \text{ (Warum?)}$$

  Also gibt es keine Nullstelle mit Absolutwert größer als $|a_0|$.
- Eingeschränkt auf Polynome mit nur einer Variablen ist das Nullstellenproblem damit entscheidbar.

Ist N entscheidbar? – Diskussion

- Für Polynome mit mehreren Variablen gibt es leider keine obere Schranke für die Absolutwerte der Nullstellen. Um das einzusehen, betrachte beispielsweise das Polynom $x + y$.

Ist N entscheidbar? – Diskussion

- Für Polynome mit mehreren Variablen gibt es leider keine obere Schranke für die Absolutwerte der Nullstellen. Um das einzusehen, betrachte beispielsweise das Polynom $x + y$.
- Aber vielleicht gibt es ja immer eine Nullstelle mit kleinen Absolutwerten und somit eine obere Schranke für die Nullstelle mit den kleinsten Absolutwerten?

Ist N entscheidbar? – Diskussion

- Für Polynome mit mehreren Variablen gibt es leider keine obere Schranke für die Absolutwerte der Nullstellen. Um das einzusehen, betrachte beispielsweise das Polynom $x + y$.
- Aber vielleicht gibt es ja immer eine Nullstelle mit kleinen Absolutwerten und somit eine obere Schranke für die Nullstelle mit den kleinsten Absolutwerten?
- Oder vielleicht gibt es ganz andere Möglichkeiten einem Polynom anzusehen, ob es eine ganzzahlige Nullstelle hat?

Ist N entscheidbar? – Diskussion

- Für Polynome mit mehreren Variablen gibt es leider keine obere Schranke für die Absolutwerte der Nullstellen. Um das einzusehen, betrachte beispielsweise das Polynom $x + y$.
- Aber vielleicht gibt es ja immer eine Nullstelle mit kleinen Absolutwerten und somit eine obere Schranke für die Nullstelle mit den kleinsten Absolutwerten?
- Oder vielleicht gibt es ganz andere Möglichkeiten einem Polynom anzusehen, ob es eine ganzzahlige Nullstelle hat?
- Erst knapp siebzig Jahre, nachdem Hilbert sein Problem präsentiert hatte, konnte Yuri Matijasevič alle diese Fragen negativ beantworten.

Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems

Hilbert hat die folgende Antwort nicht erwartet.

Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems

Hilbert hat die folgende Antwort nicht erwartet.

Satz von Matijasevič (1970)

Das Problem, ob ein ganzzahliges Polynom eine ganzzahlige Nullstelle hat, ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems

Hilbert hat die folgende Antwort nicht erwartet.

Satz von Matijasevič (1970)

Das Problem, ob ein ganzzahliges Polynom eine ganzzahlige Nullstelle hat, ist unentscheidbar.

Damit ist Hilberts Aufgabenstellung unlösbar.

Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems

- Der Beweis des Satzes von Matijasevič beruht auf einer Kette von Reduktionen, durch die letztendlich das Halteproblem H auf das Nullstellenproblem N reduziert wird.
- Yuri Matijasevič hat das letzte Glied dieser Kette geschlossen. Andere wichtige Beiträge zu diesem Ergebnis wurden zuvor von Martin Davis, Julia Robinson und Hilary Putnam erbracht.

Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems

- Der Beweis des Satzes von Matijasevič beruht auf einer Kette von Reduktionen, durch die letztendlich das Halteproblem H auf das Nullstellenproblem N reduziert wird.
- Yuri Matijasevič hat das letzte Glied dieser Kette geschlossen. Andere wichtige Beiträge zu diesem Ergebnis wurden zuvor von Martin Davis, Julia Robinson und Hilary Putnam erbracht.
- Leider ist der Beweis zu lang, um ihn im Rahmen dieser Vorlesung vollständig präsentieren zu können.

Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems

- Der Beweis des Satzes von Matijasevič beruht auf einer Kette von Reduktionen, durch die letztendlich das Halteproblem H auf das Nullstellenproblem N reduziert wird.
- Yuri Matijasevič hat das letzte Glied dieser Kette geschlossen. Andere wichtige Beiträge zu diesem Ergebnis wurden zuvor von Martin Davis, Julia Robinson und Hilary Putnam erbracht.
- Leider ist der Beweis zu lang, um ihn im Rahmen dieser Vorlesung vollständig präsentieren zu können.
- Wir werden nur einen Überblick sehen und alternativ das Postsche Korrespondenzproblem betrachten.

Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems – Zutaten

Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems – Zutaten

Sei $\mathrm{Dioph}(M)$ das Problem zu entscheiden, ob eine gegebene diophantische Gleichung über M lösbar ist.

Sei $\mathrm{ExpDioph}(M)$ das Problem zu entscheiden, ob eine gegebene Gleichung, die zusätzlich noch Terme der Form x^y haben darf, über M lösbar ist.

Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems – Zutaten

Sei $\mathrm{Dioph}(M)$ das Problem zu entscheiden, ob eine gegebene diophantische Gleichung über M lösbar ist.

Sei $\mathrm{ExpDioph}(M)$ das Problem zu entscheiden, ob eine gegebene Gleichung, die zusätzlich noch Terme der Form x^y haben darf, über M lösbar ist.

Die Reduktionskette im Beweis ist:

$$H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{Z}) = N$$

$\mathrm{Dioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{Z})$

Wir benötigen eine Reduktion, die zu einem Polynom p ein neues Polynom $f(p)$ berechnet, so dass $p = 0$ genau dann eine Lösung über $\mathbb{N}$ hat, wenn $f(p) = 0$ eine Lösung über $\mathbb{Z}$ hat.

$\mathrm{Dioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{Z})$

Wir benötigen eine Reduktion, die zu einem Polynom p ein neues Polynom $f(p)$ berechnet, so dass $p = 0$ genau dann eine Lösung über $\mathbb{N}$ hat, wenn $f(p) = 0$ eine Lösung über $\mathbb{Z}$ hat.

Theorem (Vier-Quadrate-Satz von Lagrange)

Jede natürliche Zahl x lässt sich als Summe von vier Quadratzahlen darstellen.

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}\colon x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

$\mathrm{Dioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{Z})$

Wir benötigen eine Reduktion, die zu einem Polynom p ein neues Polynom $f(p)$ berechnet, so dass $p = 0$ genau dann eine Lösung über $\mathbb{N}$ hat, wenn $f(p) = 0$ eine Lösung über $\mathbb{Z}$ hat.

Theorem (Vier-Quadrate-Satz von Lagrange)

Jede natürliche Zahl x lässt sich als Summe von vier Quadratzahlen darstellen.

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z} \colon x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung $p(x_1, x_2 \ldots, x_t) = 0$ genau dann eine Lösung über $\mathbb{N}$ hat, wenn

$$p(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2, \ldots, a_t^2 + b_t^2 + c_t^2 + d_t^2) = 0$$

eine Lösung über $\mathbb{Z}$ hat.

Es folgt $\mathrm{Dioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{Z})$.

$H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$

Für den Beweisschritt $H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$ benutzt man das Halteproblem von Registermaschinen.

$H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$

Für den Beweisschritt $H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$ benutzt man das Halteproblem von Registermaschinen.
Es genügt hier Registermaschinen mit sehr eingeschränkten Befehlssatz und endlich vielen Registern zu betrachten. (Siehe spätere Vorlesungen.)

$H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$

Für den Beweisschritt $H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$ benutzt man das Halteproblem von Registermaschinen.
Es genügt hier Registermaschinen mit sehr eingeschränkten Befehlssatz und endlich vielen Registern zu betrachten. (Siehe spätere Vorlesungen.)

Idee:

- Man kodiert die Befehlszählerfolge $b_1, \ldots, b_t$ als natürliche Zahl $b_1 \cdots b_t$ über einer ausreichend großen Basis.

$H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$

Für den Beweisschritt $H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$ benutzt man das Halteproblem von Registermaschinen.
Es genügt hier Registermaschinen mit sehr eingeschränkten Befehlssatz und endlich vielen Registern zu betrachten. (Siehe spätere Vorlesungen.)

Idee:

- Man kodiert die Befehlszählerfolge $b_1, \dots, b_t$ als natürliche Zahl $b_1 \cdots b_t$ über einer ausreichend großen Basis.
- Die Folge der Inhalte eines Registers $c(i)$ werden ebenso als eine natürliche Zahl kodiert.

$H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$

Für den Beweisschritt $H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$ benutzt man das Halteproblem von Registermaschinen.
Es genügt hier Registermaschinen mit sehr eingeschränkten Befehlssatz und endlich vielen Registern zu betrachten. (Siehe spätere Vorlesungen.)

Idee:

- Man kodiert die Befehlszählerfolge $b_1, \dots, b_t$ als natürliche Zahl $b_1 \cdots b_t$ über einer ausreichend großen Basis.
- Die Folge der Inhalte eines Registers $c(i)$ werden ebenso als eine natürliche Zahl kodiert.
- Man verwendet nun (exponentielle) Gleichungen um zu garantieren, dass die Zahlen der Konfigurationsabfolge der Registermaschine entsprechen.

$H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$

Für den Beweisschritt $H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N})$ benutzt man das Halteproblem von Registermaschinen.
Es genügt hier Registermaschinen mit sehr eingeschränkten Befehlssatz und endlich vielen Registern zu betrachten. (Siehe spätere Vorlesungen.)

Idee:

- Man kodiert die Befehlszählerfolge $b_1, \ldots, b_t$ als natürliche Zahl $b_1 \cdots b_t$ über einer ausreichend großen Basis.
- Die Folge der Inhalte eines Registers $c(i)$ werden ebenso als eine natürliche Zahl kodiert.
- Man verwendet nun (exponentielle) Gleichungen um zu garantieren, dass die Zahlen der Konfigurationsabfolge der Registermaschine entsprechen.

  (Diverse Details sind in dieser groben Übersicht unterschlagen.)

$\mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{N})$

$\mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{N})$

Dieser Teil ist aufwendig...