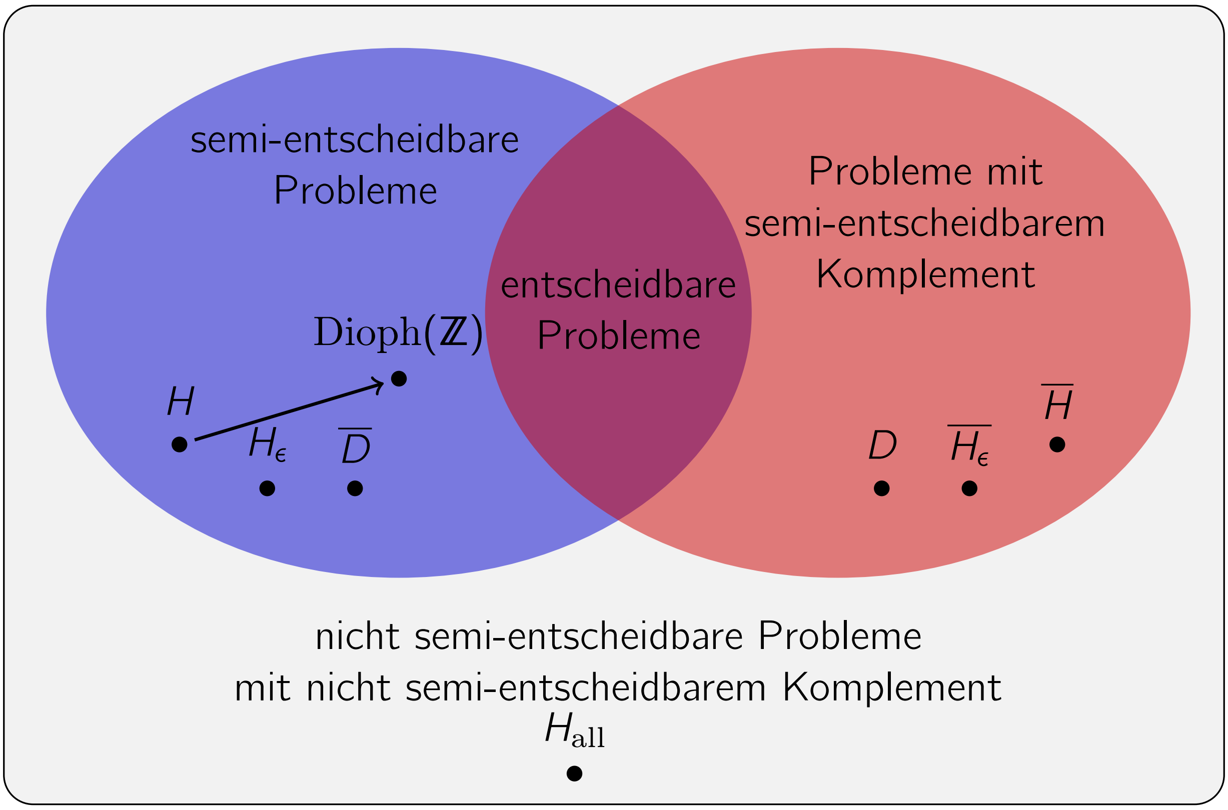
Vorlesung 10
Das Postsche Korrespondenzproblem

Wdh.: Berechenbarkeitslandschaft



Wdh.: Komplexität des allgemeines Halteproblem

Vorbeobachtung: H_ϵ ist unentscheidbar, aber semi-entscheidbar. Folglich ist $\overline{H}_\epsilon$ nicht semi-entscheidbar.

Wir haben gezeigt

Behauptung A

$$\overline{H}_\epsilon \leq \overline{H}_{\text{all}}$$

Behauptung B

$$\overline{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$$

Aus diesen Reduktionen folgt:

Satz

Weder $\overline{H}_{all}$ noch H_{all} sind semi-entscheidbar.

Wdh.: Hilberts zehntes Problem

Hilberts zehntes Problem

Beschreibe einen Algorithmus, der entscheidet, ob ein gegebenes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle hat.

Die diesem Entscheidungsproblem zugrundeliegende Sprache ist

$$N = \{ p \mid p \text{ ist ein Polynom mit einer ganzzahligen Nullstelle} \} .$$

Satz von Matijasevič (1970)

Das Problem, ob ein ganzzahliges Polynom eine ganzzahlige Nullstelle hat, ist unentscheidbar.

Wdh.: Unentscheidbarkeit des Nullstellenproblems

Sei $\mathrm{Dioph}(M)$ das Problem zu entscheiden, ob eine gegebene diophantische Gleichung über M lösbar ist.

Sei $\mathrm{ExpDioph}(M)$ das Problem zu entscheiden, ob eine gegebene Gleichung, die zusätzlich noch Terme der Form x^y haben darf, über M lösbar ist.

Die Reduktionskette im Beweis ist:

$$H \leq \mathrm{ExpDioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Dioph}(\mathbb{Z}) = N$$

Das Postsche Korrespondenzproblem – Einführung

Das Postsche Korrespondenzproblem (PKP) ist eine Art Puzzle aus Dominos.

- Jeder Domino ist mit zwei Wörtern über einem Alphabet Σ beschrieben, ein Wort in der oberen Hälfte und eines in der unteren. Gegeben sei eine Menge K von Dominos z.B.

$$K = \left\{ \left[\frac{b}{ca}\right], \left[\frac{a}{ab}\right], \left[\frac{ca}{a}\right], \left[\frac{abc}{c}\right] \right\} .$$

- Die Aufgabe besteht darin, eine Folge von Dominos aus K zu ermitteln, so dass sich oben und unten das gleiche Wort ergibt.
- Die Folge soll aus mindestens einem Domino bestehen.
- Wiederholungen von Dominos sind erlaubt. Ein Beispiel für eine derartige korrespondierende Folge über K ist

$$\left[\frac{a}{ab}\right] \left[\frac{b}{ca}\right] \left[\frac{ca}{a}\right] \left[\frac{a}{ab}\right] \left[\frac{abc}{c}\right] .$$

Das Postsche Korrespondenzproblem – Einführung

Nicht für jede Menge K ist dies möglich. Betrachte beispielsweise

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} abc \\ \hline ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ \hline aa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abcb \\ \hline abc \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abc \\ \hline bc \end{bmatrix} \right\} .$$

Warum gibt es keine Lösung des PKP-Puzzles für diese Dominos?

Definition des Postschen Korrespondenzproblem

Definition (Postsches Korrespondenzproblem, kurz: PKP)

Eine Instanz des PKP besteht aus einer Menge

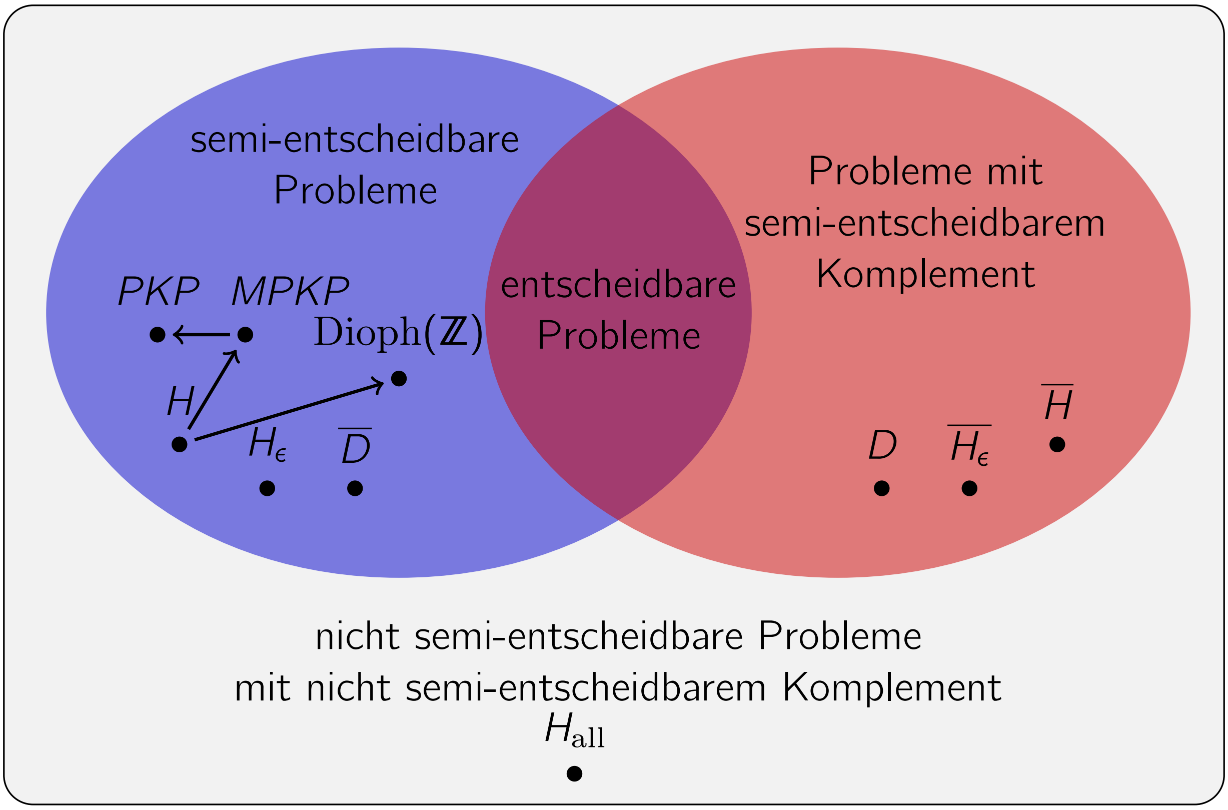
$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline y_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_k \\ \hline y_k \end{bmatrix} \right\} ,$$

wobei x_i und y_i nichtleere Wörter über einem endlichen Alphabet Σ sind. Es soll entschieden werden, ob es eine korrespondierende Folge von Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$ für ein $n \geq 1$ gibt, so dass gilt $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$.

Die Elemente der Menge K bezeichnen wir als Dominos.

Wir werden die Unentscheidbarkeit des PKP durch eine kurze Reduktionskette nachweisen, die einen Umweg über eine Variante des PKP nimmt.

Berechenbarkeitslandschaft



Definition des Modifizierten PKP

Definition (Modifiziertes PKP, kurz: MPKP)

Eine Instanz des MPKP besteht aus einer geordneten Menge

$$K = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \right) ,$$

wobei x_i und y_i nichtleere Wörter über einem endlichen Alphabet Σ sind. Es soll entschieden werden, ob es eine *korrespondierende Folge* von Indizes $i_2, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, für ein $n \geq 1$ gibt, so dass gilt $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_1 y_{i_2} \ldots y_{i_n}$.

Die Modifizierung liegt also darin, dass wir einen Startdomino $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ bestimmt haben, mit dem die korrespondierende Folge beginnen muss.

Reduktionskette

Wir werden die folgenden zwei Aussagen beweisen.

Lemma A

$MPKP \leq PKP$.

Lemma B

$H \leq MPKP$.

Aus der Transitivität der Reduzierbarkeit (Übungsaufgabe) folgt $H \leq PKP$ und somit folgt:

Satz

Das PKP ist nicht entscheidbar.

Beweis von Lemma A ($MPKP \leq PKP$)

Beschreibung der Funktion f:

Seien $\#$ und $\$$ zwei Symbole, die nicht im Alphabet Σ des MPKP enthalten sind.

Wir bilden $K = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \hline y_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} x_k \\ \hline y_k \end{bmatrix} \right)$ auf

$$f(K) = \left\{ \begin{bmatrix} x'_0 \\ \hline y'_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x'_1 \\ \hline y'_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} x'_k \\ \hline y'_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x'_{k+1} \\ \hline y'_{k+1} \end{bmatrix} \right\}$$

ab, wobei

- x'_i aus x_i (für $1 \leq i \leq k$) entsteht, indem wir hinter jedem Zeichen ein $\#$ einfügen, und
- y'_i aus y_i (für $1 \leq i \leq k$) entsteht, indem wir vor jedem Zeichen ein $\#$ einfügen.

Ferner setzen wir $x'_0 = \#x'_1$; $x'_{k+1} = \$$; $y'_0 = y'_1$ und $y'_{k+1} = \#\$$.

Die Funktion f ist berechenbar.

Beweis von Lemma A ($MPKP \le PKP$)

Beispiel:

$$K = \left(\begin{bmatrix} ab \\ \hline a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ \hline abc \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ \hline b \end{bmatrix} \right)$$

wird abgebildet auf

$$f(K) = \left\{ \begin{bmatrix} \#a\#b\# \\ \hline \#a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a\#b\# \\ \hline \#a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c\# \\ \hline \#a\#b\#c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a\# \\ \hline \#b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \$ \\ \hline \#\$ \end{bmatrix} \right\}.$$

Lösung des MPKP:

$$\begin{bmatrix} ab \\ \hline a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \hline b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab \\ \hline a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \hline abc \end{bmatrix}$$

Lösung des PKP:

$$\begin{bmatrix} \#a\#b\# \\ \hline \#a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\# \\ \hline \#b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\#b\# \\ \hline \#a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\# \\ \hline \#a\#b\#c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \$ \\ \hline \#\$ \end{bmatrix}$$

Beweis von Lemma A ($MPKP \le PKP$)

Zu zeigen: $K \in MPKP \;\Rightarrow\; f(K) \in PKP$

Sei $(i_2, \ldots, i_n)$ eine Lösung für K, d.h.

$$x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_n} \;=\; y_1 y_{i_2} \ldots y_{i_n} \;=\; a_1 a_2 \ldots a_s$$

für geeignet gewählte Symbole $a_1, \ldots, a_s$ aus Σ.

Dann ist $(0, i_2, \ldots, i_n, k+1)$ eine Lösung für $f(K)$, denn

$$x'_0 x'_{i_2} \ldots x'_{i_n} \$ \;=\; \#a_1\#a_2\# \ldots \#a_s\#\$ \;=\; y'_0 y'_{i_2} \ldots y'_{i_n} \#\$$$

Aus einer Lösung für K bzgl. $MPKP$ lässt sich also eine Lösung für $f(K)$ bzgl. PKP konstruieren und die obige Behauptung ist gezeigt.

Beweis von Lemma A ($MPKP \leq PKP$)

Zu zeigen: $f(K) \in PKP \;\Rightarrow\; K \in MPKP$

Sei nun $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eine Lösung minimaler Länge für $f(K)$.

- **Beobachtung 1:** Es gilt $i_1 = 0$ und $i_n = k+1$, weil nur x'_0 und y'_0 mit dem gleichen Zeichen beginnen und nur x'_{k+1} und y'_{k+1} mit dem gleichen Zeichen enden.
- **Beobachtung 2:** Es gilt $i_j \neq 0$ für $2 \leq j \leq n$, weil sonst zwei $\#$-Zeichen im oberen Wort direkt aufeinanderfolgen würden, was im unteren Wort unmöglich ist.
- **Beobachtung 3:** Es gilt $i_j \neq k+1$ für $1 \leq j < n$, denn würde das $\$$-Zeichen vorher auftreten, könnten wir die vorliegende minimale korrespondierende Folge nach dem ersten Vorkommen des $\$$-Zeichens abschneiden und hätten eine noch kürzere Lösung gefunden.

Beweis von Lemma A ($MPKP \leq PKP$)

Aus den Beobachtungen folgt: Unsere PKP-Lösung für $f(K)$ hat die Struktur

$$\begin{aligned}
\underbrace{x'_{i_1}}_{=x'_0=\#x'_1} \; x'_{i_2} \ldots x'_{i_{n-1}} \; \underbrace{x'_{i_n}}_{=x'_{k+1}=\$} \quad &= \quad \#a_1\#a_2\#\ldots\#a_s\#\$ \\
&= \quad \underbrace{y'_{i_1}}_{=y'_0=y'_1} \; y'_{i_2} \ldots y'_{i_{n-1}} \; \underbrace{y'_{i_n}}_{=y'_{k+1}=\#\$}
\end{aligned}$$

für geeignet gewählte Symbole $a_1, \ldots, a_s$ aus Σ.

Daraus können wir die folgende MPKP-Lösung für K konstruieren:

$$x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_{n-1}} \;=\; a_1 a_2 \ldots a_s \;=\; y_1 y_{i_2} \ldots y_{i_{n-1}} \quad .$$

Somit gilt $f(K) \in PKP \;\Rightarrow\; K \in MPKP$. $\square$

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

- Scheinbar haben Dominos wenig mit Turingmaschinen zu tun.
- In Lemma B ($H \leq MPKP$) wird dennoch behauptet, dass man mit Hilfe eines Puzzles aus Dominos das Halteproblem für Turingmaschinen entscheiden kann.
- Bevor wir in den Beweis des Lemmas einsteigen, möchten wir auf der Basis eines Beispiels illustrieren, wie die Rechnung einer Turingmaschine durch ein Puzzle aus Dominos „simuliert“ werden kann.

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Betrachte die TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \overline{q}, \delta)$ wobei:

$\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, B\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, \overline{q}\}$.

Die Übergangsfunktion δ sei gegeben durch

δ	0	1	B
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(\overline{q}, 1, N)$
q_1	$(q_2, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(\overline{q}, 1, N)$
q_2	$(q_2, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	(q_2, B, R)

- Die TM M erkennt, ob das Eingabewort von der Form $0^i 1^j$, mit $i, j \geq 0$, ist.
- Bei Eingabe eines Wortes dieser Form terminiert die Rechnung im Zustand $\overline{q}$ und die Maschine akzeptiert. Ansonsten läuft der Kopf im Zustand q_2 weiter und weiter nach rechts.

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Die Rechnung der TM auf einer gegebenen Eingabe kann durch eine Konfigurationsfolge beschrieben werden.

Konfigurationsfolge von M auf Eingabe $w = 0011$

$$q_0 0011 \vdash 0q_0 011 \vdash 00q_0 11 \vdash 001q_1 1 \vdash 0011q_1 B \vdash 0011\overline{q}1$$

- Wir möchten die Rechnung einer TM auf einer Eingabe durch ein Puzzle aus Dominos „simulieren“. Dieses Puzzle entspricht dem MPKP.
- Als Startdomino für das MPKP wählen wir einen Domino, bei dem das untere Wort aus der Anfangskonfiguration mit drei zusätzlichen Trennsymbolen besteht.

$$\left[\frac{\#}{\#\#q_0 0011\#}\right].$$

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Das Puzzle für unsere Beispielrechnung (M, w) enthält unter anderem jeweils einen Domino für jedes Zeichen aus $\Gamma \cup \{\#\}$.

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{1}{1}\right], \left[\frac{B}{B}\right], \left[\frac{\#}{\#}\right]$$

Liste erlaubter Dominos: Wir erweitern diese Menge um je einen Domino für jeden Eintrag in der Tabelle der Überführungsfunktion δ, der den jeweiligen Übergang inklusive der Kopfbewegung beschreibt.

$$\left[\frac{q_0 0}{0q_0}\right], \left[\frac{q_0 1}{1q_1}\right], \left[\frac{q_0 B}{\overline{q}1}\right], \left[\frac{q_1 0}{0q_2}\right], \left[\frac{q_1 1}{1q_1}\right], \left[\frac{q_1 B}{\overline{q}1}\right], \left[\frac{q_2 0}{0q_2}\right], \left[\frac{q_2 1}{1q_2}\right], \left[\frac{q_2 B}{Bq_2}\right]$$

Wir werden später noch weitere Steine zur Liste erlaubter Dominos hinzufügen.

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Beobachtung:

Wenn wir den Startdomino $\left[\frac{\#}{\#\#q_0 0011\#}\right]$ mit einer Folge von Dominos aus der Liste der erlaubten Dominos derart ergänzen, dass der obere String ein Präfix des unteren Strings ist, so

- rekonstruieren wir im unteren String die Konfigurationsfolge von M auf w, und
- der obere String folgt dem unteren mit einer Konfiguration Rückstand.

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Rekonstruktion der Konfigurationsfolge

Die ersten Dominos in der Lösung des Puzzles sind

$$\left[\frac{\#}{\#\#q_0 0011\#}\right] \qquad \begin{array}{l}
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{q_0 0}{0 q_0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{q_0 0}{0 q_0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{q_0 1}{1 q_1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{q_1 1}{1 q_1}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{q_1 \#}{\bar{q} 1 \#}\right] \ \ldots
\end{array}$$

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

- Im letzten Schritt haben wir allerdings einen Domino verwendet, der nicht in der zuvor spezifizierten Liste erlaubter Dominos enthalten ist.
- Tatsächlich ergänzen wir die Liste erlaubter Dominos um die folgenden Elemente.

$$\left[\frac{q_0\#}{\overline{q}1\#}\right], \left[\frac{q_1\#}{\overline{q}1\#}\right]$$

Die Aufgabe dieser Dominos ist es, Überführungen zu realisieren, die ein neues Blank-Symbol benötigen, da der Kopf am Ende des Wortes steht.

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Wie können wir es schaffen, dass der obere String seinen Rückstand am Ende der Rechnung aufholt? – Zu diesem Zweck ergänzen wir die Liste der erlaubten Dominos um die folgenden Elemente.

$$\left[\frac{\overline{q}0}{\overline{q}}\right], \left[\frac{\overline{q}1}{\overline{q}}\right], \left[\frac{\overline{q}B}{\overline{q}}\right], \left[\frac{0\overline{q}}{\overline{q}}\right], \left[\frac{1\overline{q}}{\overline{q}}\right], \left[\frac{B\overline{q}}{\overline{q}}\right]$$

Des Weiteren fügen wir noch einen Abschlussdomino hinzu.

$$\left[\frac{\#\overline{q}\#\#}{\#}\right]$$

Beachte: Diese neuen Dominos können nur dann zum Einsatz kommen, wenn der Endzustand $\overline{q}$ erreicht ist, also nur wenn die Rechnung der TM terminiert.

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Rekonstruktion der Konfigurationsfolge – Fortsetzung

$$
\begin{array}{l}
\ldots \quad \left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{q_1\#}{\overline{q}1\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{\overline{q}1}{\overline{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1\overline{q}}{\overline{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1\overline{q}}{\overline{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0\overline{q}}{\overline{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0\overline{q}}{\overline{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \qquad \left[\frac{\#\overline{q}\#\#}{\#}\right] .
\end{array}
$$

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Jetzt stimmt der obere mit dem unteren String überein.

- Die Idee hinter der obigen Konstruktion ist es, eine Eingabe für das Halteproblem in ein MPKP-Puzzle zu transformieren, so dass das Puzzle genau dann eine Lösung hat, wenn die im Halteproblem betrachtete TM auf ihrer Eingabe hält.
- Unser Beispiel hat erläutert, wie eine derartige Transformation für eine bestimmte Eingabe des Halteproblems aussehen könnte. Der folgende Beweis für Lemma B verallgemeinert und formalisiert das Vorgehen aus unserem Beispiel.

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Wir beschreiben eine berechenbare Funktion f, die eine syntaktisch korrekte Eingabe für H der Form $(\langle M \rangle, w)$ auf eine syntaktisch korrekte Instanz $K = f\big((\langle M \rangle, w)\big)$ für das MPKP abbildet, so dass gilt

$$M \text{ hält auf } w \;\Leftrightarrow\; K \text{ hat eine Lösung} \;.$$

Syntaktisch nicht korrekte Eingaben für H werden auf syntaktisch nicht korrekte Eingaben für MPKP abgebildet.

Das Alphabet, das wir für die MPKP-Instanz verwenden, ist $\Gamma \cup Q \cup \{\#\}$, wobei gelte $\# \notin \Gamma \cup Q$.

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Konstruktion der Funktion f

Gegeben sei das Tupel $(\langle M \rangle, w)$. Wir beschreiben, welche Dominos die Menge $K = f\big((\langle M \rangle, w)\big)$ enthält.

Der Startdomino ist von der Form

$$\left[\frac{\#}{\#\#q_0 w\#}\right] .$$

Des Weiteren enthalte K die folgenden Arten von Dominos.

Kopierdominos:

$$\left[\frac{a}{a}\right] \quad \text{für alle } a \in \Gamma \cup \{\#\}$$

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Überführungsdominos:

$$\left[\frac{qa}{q'c}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,a) = (q',c,N), \text{ für } q \in Q \setminus \{\overline{q}\},\ a \in \Gamma$$

$$\left[\frac{qa}{cq'}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,a) = (q',c,R), \text{ für } q \in Q \setminus \{\overline{q}\},\ a \in \Gamma$$

$$\left[\frac{bqa}{q'bc}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,a) = (q',c,L), \text{ für } q \in Q \setminus \{\overline{q}\},\ a, b \in \Gamma$$

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Spezielle Überführungsdominos, die implizite Blanks berücksichtigen:

$$\left[\frac{\#qa}{\#q'Bc}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,a) = (q',c,L), \text{ für } q \in Q \setminus \{\overline{q}\},\ a \in \Gamma$$

$$\left[\frac{q\#}{q'c\#}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,B) = (q',c,N), \text{ für } q \in Q \setminus \{\overline{q}\}$$

$$\left[\frac{q\#}{cq'\#}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,B) = (q',c,R), \text{ für } q \in Q \setminus \{\overline{q}\}$$

$$\left[\frac{bq\#}{q'bc\#}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,B) = (q',c,L), \text{ für } q \in Q \setminus \{\overline{q}\},\ b \in \Gamma$$

$$\left[\frac{\#q\#}{\#q'Bc\#}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,B) = (q',c,L), \text{ für } q \in Q \setminus \{\overline{q}\}$$

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Löschdominos:

$$\left[\frac{a\overline{q}}{\overline{q}}\right] \text{ und } \left[\frac{\overline{q}a}{\overline{q}}\right] \text{ für } a \in \Gamma$$

Abschlussdomino:

$$\left[\frac{\#\overline{q}\#\#}{\#}\right]$$

Dies sind alle Dominos in der MPKP-Instanz. Die Beschreibung der Funktion f ist somit abgeschlossen.

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Wir beweisen nun die Korrektheit der Konstruktion:

Zu zeigen 1.) f ist berechenbar. ✓

Zu zeigen 2.) M hält auf $w \Rightarrow K \in MPKP$

Wenn M auf w hält, so entspricht die Rechnung von M auf w einer endlichen Konfigurationsfolge der Form

$$k_0 \vdash k_1 \vdash \cdots \vdash k_{t-1} \vdash k_t \quad ,$$

wobei k_0 die Startkonfiguration und k_t die Endkonfiguration im Zustand $\overline{q}$ ist.

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

In diesem Fall können wir, beginnend mit dem Startdomino, nach und nach Kopier- und Überführungsdominos hinzulegen, so dass

- der untere String die vollständige Konfigurationsfolge von M auf w in der folgenden Form darstellt

  $$\#\# \, k_0 \, \#\# \, k_1 \, \#\# \cdots \#\# \, k_{t-1} \, \#\# \, k_t \, \# \quad ,$$

  und
- der obere String ein Präfix des unteren Strings ist, nämlich

  $$\#\# \, k_0 \, \#\# \, k_1 \, \#\# \cdots \#\# \, k_{t-1} \, \# \quad .$$

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Durch Hinzufügen von Löschdominos kann jetzt der Rückstand des oberen Strings fast ausgeglichen werden. Danach sind beide Strings identisch bis auf ein Suffix der Form

$$\#\overline{q}\# \quad .$$

Dieses Suffix fehlt im oberen String.

Nach Hinzufügen des Abschlussdominos

$$\left[\frac{\#\overline{q}\#\#}{\#}\right]$$

sind beide Strings somit identisch.

Wenn M auf w hält, gilt somit $K \in MPKP$.

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Zu zeigen: M hält nicht auf $w \;\Rightarrow\; K \notin MPKP$

Unsere Ausgangsitutation ist eine TM M und eine Eingabe w, so dass M nicht auf w hält.

Zum Zweck des Widerspruchs nehmen wir nun an, dass das MPKP-Puzzle K aus den Dominos für M und w eine Lösung hat, d.h., es gibt eine korrespondierende Folge aus diesen Dominos.

Allgemeine Beobachtungen zu korrespondierenden Folgen:

- Beim Startdomino ist der obere String kürzer als der untere.
- Auch bei den Kopier- und Überführungsdominos ist der obere String niemals länger als der untere.
- Nur Abschluss- und Löschdominos zeigen unten kürzere Strings als oben.

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Aus den Beobachtungen folgt:

- Die (eindeutige) korrespondierende Folge zur Rechnung von M auf w enthält deshalb zumindest einen Lösch- oder Abschlussdomino, denn sonst wäre der untere String länger als der obere.
- In dieser Folge erscheint deshalb der Zustand $\overline{q}$, da dieser Zustand auf allen Löschdominos und dem Abschlussdomino abgebildet ist.
- Die auf den Dominos dargestellte Rechnung von M auf w terminiert.

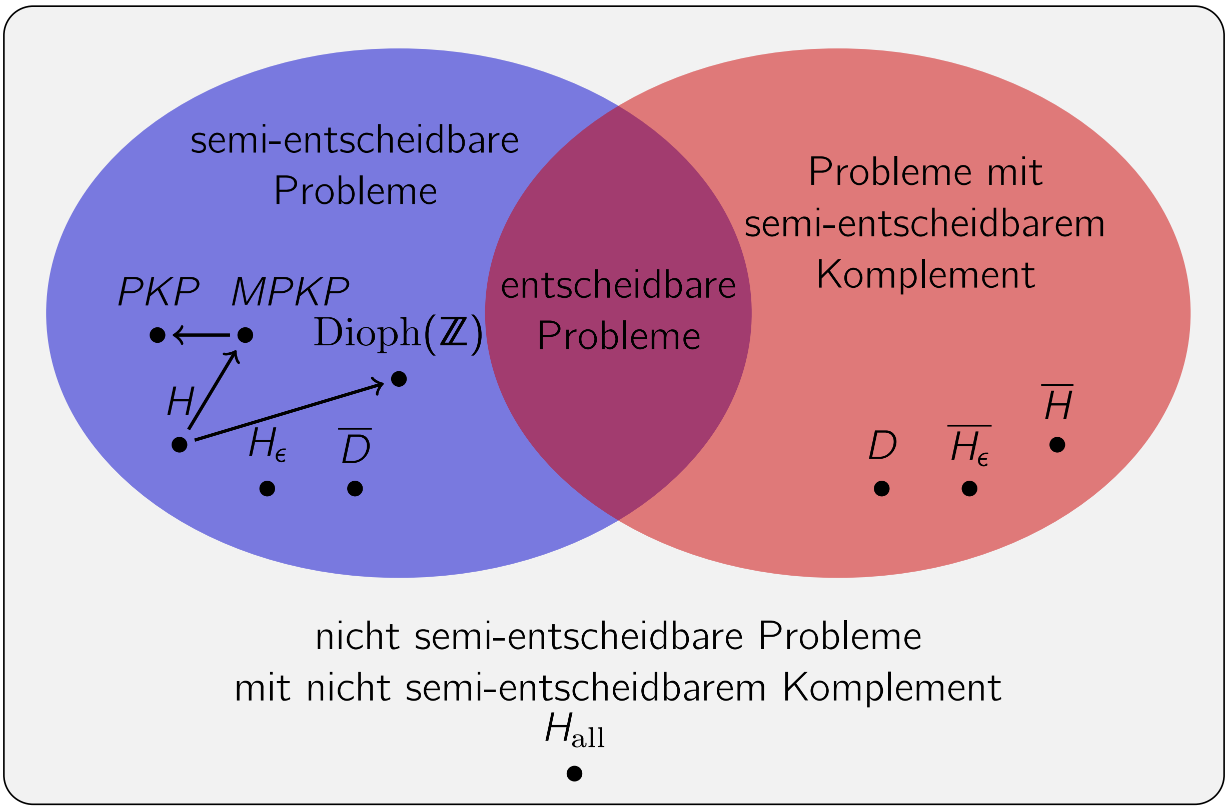
Dies widerspricht jedoch unserer Voraussetzung, dass M nicht auf w hält. Also gilt $K \notin MPKP$. □

Eingeschränkte Versionen des Korrespondenzproblems

Wie ist die Komplexität für eingeschränkte Varianten des Problems?

- Falls nur kurze Wörter erlaubt sind:
  - Wenn die Wörter auf den Dominos höchstens Länge 1 haben, so ist das Problem entscheidbar.
  - Schon für Wortlänge höchstens 2 ist das Problem unentscheidbar.
- Falls nur wenige Dominos erlaubt sind:
  - Für 2 Dominos ist das Problem entscheidbar. [Ehrenfeucht, Rozenberg] (1981)
  - Für 3 und 4 Dominos ist die Komplexität ungeklärt.
  - Für 5 Dominos ist das Problem unentscheidbar. [Neary] (2015)
  - Für 7 Dominos oder mehr ist das Problem unentscheidbar. [Matijasevič, Sénizergues] (1996)
  - Für unbeschränkt viele Dominos im Allgemeinen unentscheidbar. [Post] (1947)

Berechenbarkeitslandschaft

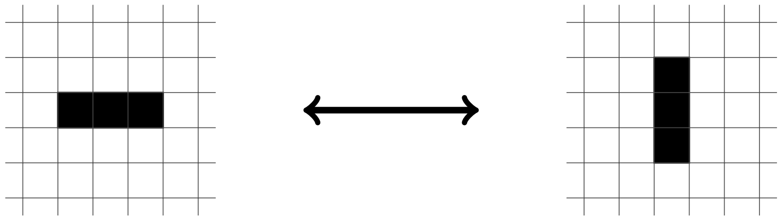


Conways Spiel des Lebens

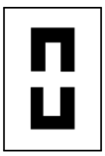
Conways Spiel des Lebens ist ein zellulärer Automat auf einem unendlichen 2-dimensionalen Gitter.
Zu jedem Zeitpunkt ist eine Zelle lebend oder tot.

Ausgehend von einer Anfangskonfiguration entwickelt sich die Zellenkonfiguration Schritt für Schritt folgendermaßen:

- Eine tote Zelle mit genau drei lebenden Nachbarn ist im nächsten Schritt lebendig.
- Lebende Zellen mit weniger als 2 lebenden Nachbarn sterben ab.
- Lebende Zellen mit mehr als 3 lebenden Nachbarn sterben ab.
- Alle anderen Zellen bleiben unverändert.



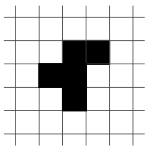
Einige Startkonfigurationen

Das U: 

Der Gleiter:

Einige Startkonfigurationen

Das f-Pentomino.



Entscheidbarkeit im Spiel des Lebens

Satz

Das Spiel des Leben ist Turing-vollständig.

Dies impliziert, dass diverse Probleme unentscheidbar sind.

- Zum Beispiel ist unentscheidbar, ob eine gegebene Anfangskonfiguration ausstirbt.

Gospers Gleiterkanone