Prof. Dr. M. Grohe
E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt 1 mit Lösungen

Abgabetermin: Mittwoch, der 26. Oktober 2022 um 14:30

Aufgabe 4 (Kodierung) **6 (3 + 3) Punkte**

Geben Sie formale Definitionen für die Sprachen der folgenden Entscheidungsprobleme an. Machen Sie sich dabei insbesondere Gedanken zur Kodierung der Eingabe und zum Eingabealphabet.

a) Ein Graph $G = (V, E)$ ist *k-färbbar*, falls es möglich ist, allen Knoten von G je eine von k Farben zuzuordnen, so dass keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe erhalten. Das Färbbarkeitsproblem besteht darin, für einen gegebenen Graphen G und eine natürliche Zahl k zu entscheiden, ob G k-färbbar ist. Die Sprache des Färbbarkeitsproblems $L_{\text{Färben}}$ enthält die Kodierung aller Paare (G, k) mit dieser Eigenschaft.

b) Das Partition-Into-Three-Sets-Problem besteht darin, zu entscheiden, ob eine gegebene Multimenge A (also eine Menge, welche Elemente mehrfach enthalten kann) von natürlichen Zahlen so in drei Teilmultimengen X, Y und Z von A partitioniert werden kann, dass die Summen der Elemente aus X, Y und Z gleich sind. Die Sprache L_{P3} enthält die Kodierung aller Multimengen, welche sich wie beschrieben partitionieren lassen.

Lösung:

a) Zunächst benötigen wir eine Kodierung der Eingabeinstanz, also eines Graphen $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$. Dazu können wir beispielsweise die Adjazenzmatrix A von G verwenden, d.h. wir setzen

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i v_j \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da jeder Eintrag von A mit einem Bit kodiert werden kann, können wir A nun zeilenweise Eintrag für Eintrag zu einem Wort der Länge n^2 aus $\{0, 1\}^*$ zusammenfügen und so kodieren. Den Parameter b repräsentieren wir mit $\text{bin}(b)$, und wir trennen die Kodierung von A und b mittels eines neuen Trennzeichens $\#$, womit wir das Eingabealphabet als $\{0, 1, \#\}$ erhalten.

Wir beschreiben eine k-Färbung mit einer Funktion $f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\}$, welche jedem Knoten (repräsentiert durch seinen Index) eine Farbe (repräsentiert durch eine Zahl in $\{1, \dots, k\}$) zuweist. Folglich ist G also k-färbbar, wenn eine solche Funktion existiert, welche gleichzeitig keinem benachbarten Paar von Knoten die gleiche Farbe zuweist. Dies ist der Fall, wenn $f(i) \neq f(j)$ für alle Index-Paare (i, j) mit $A_{i,j} = 1$ gilt.

Insgesamt erhalten wir die Sprache

$$
\begin{aligned}
L_{\text{Färben}} = \{A_{1,1} \dots A_{1,n} \dots\dots A_{n,n} \# \operatorname{bin}(k) \mid\ & A \text{ ist symmetrisch und} \\
& \text{es ex. } f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k\} \text{ so,} \\
& \text{dass für alle } (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \\
& \text{mit } A_{i,j} = 1 \text{ auch } f(i) \neq f(j) \text{ gilt}\}.
\end{aligned}
$$

b) Für die Kodierung der Multimenge A können wir für ihre Elemente die Binärdarstellung benutzen. Um die einzelnen Binärzahlen voneinander unterscheiden zu können, erweitern wir das Eingabealphabet um ein neues Trennsymbol $\#$ auf $\{0, 1, \#\}$. Dann können wir $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ durch das Wort

$$\operatorname{bin}(a_1) \# \operatorname{bin}(a_2) \# \dots \# \operatorname{bin}(a_n)$$

aus $\{0, 1, \#\}^*$ repräsentieren.

Zur formalen Beschreibung der Partition $A = X \cup Y \cup Z$ können wir die Elemente von X, Y und Z eindeutig über ihre Indizees in der obrigen Aufzählung von A identifizieren. Es soll also disjunkte Indexmengen $I_X, I_Y \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in I_X} a_i = \sum_{j \in I_Y} a_j = \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus (I_X \cup I_Y)} a_k$$

geben.

Insgesamt erhalten wir die Sprache

$$
\begin{aligned}
L_{\text{P3}} = \{\operatorname{bin}(a_1) \# \dots \# \operatorname{bin}(a_n) \mid\ & \text{es ex. } I_X, I_Y \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ mit } I_X \cap I_Y = \emptyset \\
& \text{und } \sum_{i \in I_X} a_i = \sum_{j \in I_Y} a_j = \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus (I_X \cup I_Y)} a_k\}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 (Berechnete Funktion) **5 (4 + 1) Punkte**

Wir betrachten die Turingmaschine $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \bar{q}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_0, \bar{q}, \delta)$, wobei δ durch

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	$(\bar{q}, 0, N)$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	(q_4, B, L)
q_2	$(q_2, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	(q_3, B, L)
q_3	accept	reject	accept
q_4	reject	accept	accept

gegeben ist.

a) Beschreiben Sie informell die Funktionsweise von M.

b) Geben Sie die von M berechnete Funktion an.

Lösung:

Die Turingmaschine M verwirft bei leerer Eingabe ε sofort. Andernfalls speichert sie im Zustand das erste Symbol der Eingabe (d.h. M geht bei gelesener 0 in den Zustand q_1, bei gelesener 1 in den Zustand q_2) und läuft bis zum Ende der Eingabe. Dort vergleicht sie im Zustand q_3 (bei gespeicherter 1) und q_4 (bei gespeicherter 0) das letzte Symbol der Eingabe mit dem im Zustand gespeicherten Symbol und akzeptiert, genau dann wenn die beiden Symbole *nicht* übereinstimmen.

Die von der Turingmaschine M berechnete Funktion ist also $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ mit

$$f(w) = \begin{cases} 0, & \text{falls } w = \varepsilon \text{ oder } w = w_1 \dots w_n \text{ und } w_1 = w_n \\ 1, & \text{falls } w = w_1 \dots w_n \text{ und } w_1 \neq w_n. \end{cases}$$

Aufgabe 6 (Turingmaschine) 4 Punkte

Konstruieren Sie eine Turingmaschine $M = (\{q_0, q_1, \bar{q}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_0, \bar{q}, \delta)$, welche auf der leeren Eingabe ε terminiert und möglichst viele Einsen, aber keine Nullen ausgibt. Auf allen anderen Eingaben darf M sich beliebig verhalten.

Geben Sie die Konfigurationsfolge ihrer Turingmaschine M auf der leeren Eingabe ε an.

Hinweis: Die maximal erreichbare Anzahl an Einsen ist 4.

Lösung:

Wir nutzen folgende Turingmaschine $M = (\{q_0, q_1, \bar{q}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_0, \bar{q}, \delta)$, wobei δ durch

δ	B	0	1
q_0	$(q_1, 1, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_1, 1, L)$
q_1	$(q_0, 1, L)$	$(q_0, 1, L)$	$(\bar{q}, 1, L)$

gegeben ist.

Auf der Eingabe ε ergibt sich also folgende Konfigurationsfolge:

$$q_0 B \vdash 1 q_1 B \vdash q_0 11 \vdash q_1 B 11 \vdash q_0 B 111 \vdash 1 q_1 111 \vdash \bar{q} 1111.$$

Die Turingmaschine gibt also 1111 aus.