Prof. Dr. M. Grohe
E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt 5 mit Lösungen

Abgabetermin: Mittwoch, der 23. November 2022 um 14:30

Aufgabe 5 (Abschlusseigenschaften) **6 (2 + 2 + 2) Punkte**

Seien X und Y Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Wenn X und Y semi-entscheidbar sind, dann ist auch XY semi-entscheidbar.

b) Wenn X entscheidbar ist und Y semi-entscheidbar ist, dann ist $X \setminus Y$ semi-entscheidbar.

c) Wenn X semi-entscheidbar ist und Y entscheidbar ist, dann ist $X \setminus Y$ semi-entscheidbar.

Lösung:

a) Richtig.

Die Idee der Konstruktion ist ähnlich zu Tutoriumsaufgabe 2(a). Allerdings können wir nun nicht mehr nacheinander alle möglichen Trennungen der Eingabe ausprobieren, da es Teile der Simulation gibt, die möglicherweise nicht halten. Also probiert man alle Trennungen parallel, ähnlich zum Beweis der Äquivalenz von rekursiver Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit aus der Vorlesung.

Sei M_X eine TM, die X erkennt und M_Y eine TM, die Y erkennt. Wir konstruieren eine TM M_{XY}, die XY erkennt. Diese geht wie folgt vor: Für alle Paare $xy = w$, simuliere einen Schritt von M_X auf x und einen Schritt von M_Y auf y. Wenn für ein Paar xy sowohl M_X als auch M_Y akzeptieren, dann akzeptiert M_{XY}. Ansonsten wiederhole das Vorgehen. Dass heißt in der k-ten Runde, simuliere, für alle Paare $xy = w$, k Schritte von M_X auf x und k Schritte von M_Y auf y. Wenn für ein Paar xy sowohl M_X als auch M_Y akzeptieren, dann akzeptiert M_{XY}.

Auf diese Art und Weise similieren wir auf allen Paaren $xy = w$ M_X bzw M_Y, immer einen Schritt länger als in der vorherigen Runde, bis wir irgendwann akzeptieren oder nie halten.

Korrektheit:

Wenn M_{XY} ein Wort w akzeptiert, dann gibt es ein Paar $xy = w$, so dass M_X x akzeptiert und M_Y y. Also gilt $x \in X$ und $y \in Y$, also auch $w = xy \in XY$.

Wenn $w \in XY$, dann existiert ein Paar $xy = w$, sodass $x \in X$ und $y \in Y$. Demnach akzeptiert M_X das Wort x und M_Y das Wort y. Also existiert eine natürliche Zahl i, sodass M_X das Wort x nach maximal i Schritten akzeptiert und M_Y das Wort y nach maximal i Schritten akzeptiert. Folglich akzeptiert M_{XY} das Wort $w = xy$ nach maximal i Runden.

b) Falsch.

Gegenbeispiel $X = \Sigma^*$ und $Y = H_\varepsilon$, dann ist $X \setminus Y = \overline{H_\varepsilon}$ und das ist nach VL nicht semi-entscheidbar.

c) Richtig.

Da Y entscheidbar ist, ist auch $\overline{Y}$ entscheidbar, also insbesondere auch semi-entscheidbar. Es gilt, dass $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ und wir wissen aus der Vorlesung, dass semi-entscheidbar abgeschlossen ist unter dem Schnitt.

Aufgabe 6 (Eigenschaften von Aufzählern) **5 (2 + 3) Punkte**

Ein Aufzähler A für eine Sprache L heißt

- sparsam, falls kein Wort in L mehr als einmal auf dem Ausgabeband gedruckt wird;
- kanonisch-organisiert, falls die Worte auf dem Ausgabeband in kanonischer Reihenfolge gedruckt werden.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Wenn die Aussage stimmt geben Sie eine Konstruktion an, wenn die Aussage nicht stimmt geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) Wenn L rekursiv aufzählbar ist, so gibt es einen sparsamen Aufzähler für L.

b) Wenn L rekursiv aufzählbar ist, so gibt es einen kanonisch-organisierten Aufzähler für L.

Lösung:

a) Richtig.

Die Idee ist einen Aufzähler zu bauen, der sich merkt welche Wörter schon ausgegeben wurden und vor jeder Ausgabe überprüft, ob das Wort bereits ausgegeben wurde.

Sei M ein Aufzähler für L. Sei M' ein Aufzähler, der M simuliert und zusätzlich alle ausgegebenen Wörter von M auf ein extra Band schreibt. Wenn M ein Wort w ausgibt, prüft M' ob w bereits ausgegeben wurde. Dazu muss M' das extra Band durchlaufen und prüfen ob w noch nicht vorkam. Wenn nein, gibt M' w aus, sonst führt M' die Simulation fort ohne etwas auszugeben. Damit ist M' ein sparsamer Aufzähler von L.

b) Falsch.

Die Idee ist, dass es für semi-entscheidbare aber nicht entscheidbare Sprachen keinen Aufzähler geben kann, bei dem man weiß dass ein Wort zu einem bestimmten Zeitpunkt schon hätte ausgegeben werden müssen. Sonst könnte man damit das Komplement rekursiv aufzählen und somit die Sprache entscheiden.

Sei $L = H_\varepsilon$. Dann gibt es einen Aufzähler M für L. Angenommen, es gibt einen kanonisch-organisierten Aufzähler $M_{\text{kanonisch}}$ für L. Dann gibt es auch einen Aufzähler M_{halt} für $\overline{L}$. Dazu simuliere $M_{\text{kanonisch}}$ und gib immer die Wörter aus, die $M_{\text{kanonisch}}$ nicht ausgibt: Dies gelingt, indem man sich stets das zuletzt ausgegebene Wort w' merkt, und wenn $M_{kanonisch}$ w ausgibt, dann gibt M_{halt} alle Wörter, die in der kanonischen Reihenfolge zwischen w' und w liegen, aus. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\overline{H_\varepsilon}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 7 (Alles Akzeptieren) 4 Punkte

Sei $A_{\text{all}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert alle Eingaben}\}$. Zeigen Sie, dass weder die Sprache A_{all} noch ihr Komplement $\overline{A_{\text{all}}}$ semi-entscheidbar sind.

Lösung:

Um die Aussage zu beweisen zeigen wir, dass A_{all} mindestens so schwer ist wie H_{all}, das heißt wir zeigen $H_{\text{all}} \leq A_{\text{all}}$.

Daraus, dass H_{all} nicht semi-entscheidbar ist können wir folgern, dass A_{all} nicht semi-entscheidbar ist. Außerdem wissen wir aus Tutoriumsaufgabe 1(b), dass aus $H_{\text{all}} \leq A_{\text{all}}$ folgt, dass $\overline{H_{\text{all}}} \leq \overline{A_{\text{all}}}$. Folglich folgt daraus, dass $\overline{H_{\text{all}}}$ nicht semi-entscheidbar ist auch, dass $\overline{A_{\text{all}}}$ nicht semi-entscheidbar ist.

Sei $w \in \Sigma^*$ eine Eingabe für H_{all}.

- Falls w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.
- Falls $w = \langle M\rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M^* mit der folgenden Eigenschaft: M^* simuliert das Verhalten von M auf der Eingabe. Wenn M hält, so akzeptiert M^*.

Diese Funktion ist berechenbar: Wir können überprüfen ob ein Wort eine Gödelnummer ist. Um M^* zu konstruieren müssen wir nur alle Übergänge von M in den Endzustand umschreiben zu accept.

Korrektheit:

- Falls w keine gültige Gödelnummer ist, so ist $w \notin H_{\text{all}}$ und $f(w) = w \notin A_{\text{all}}$.
- Falls $w = \langle M\rangle$ für eine TM M und sei $f(w) = \langle M^*\rangle$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\langle M\rangle \in H_{\text{all}} &\Rightarrow M \text{ hält auf allen Eingaben}\\
&\Rightarrow M^* \text{ akzeptiert alle Eingaben}\\
&\Rightarrow \langle M^*\rangle \in A_{\text{all}},\\
\langle M\rangle \notin H_{\text{all}} &\Rightarrow M \text{ hält auf mindestens einer Eingabe nicht}\\
&\Rightarrow M^* \text{ akzeptiert mindestens eine Eingabe nicht}\\
&\Rightarrow \langle M^*\rangle \notin A_{\text{all}}.
\end{aligned}
$$

Also gilt $H_{\text{all}} \leq A_{\text{all}}$.