Prof. Dr. M. Grohe
E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Übungsblatt 6 mit Lösungen

Abgabetermin: Mittwoch, der 30. November 2022 um 14:30

Aufgabe 5 (PKP auf Monoiden) **4 (2 + 2) Punkte**

Ein *Monoid* $(M, \cdot, e)$ ist eine algebraische Struktur bestehend aus

- einer Menge M,
- einer zweistelligen, assoziativen Verknüpfung $\circ \colon M \times M \to M$,
- einem neutralen Element $e \in M$.

Für ein gegebenes Monoid $\mathcal{M} = (M, \circ, e)$ definieren wir die PKP-Variante PKP($\mathcal{M}$), dessen Dominos mit Elementen von M beschrieben sind. Eine Folge von k Dominos mit den Aufschriften $x_1, \ldots x_k$ oben und den Aufschriften $y_1, \ldots, y_k$ unten ist korrespondierend, falls

$$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_k = y_1 \circ y_2 \ldots \circ y_k$$

gilt. Zeigen oder widerlegen Sie, dass PKP($\mathcal{M}$) für die folgenden Monoide entscheidbar ist:

a) $(\mathbb{N}, +, 0)$, das additive Monoid über den natürlichen Zahlen.

b) $(S_n, \circ, \mathrm{id})$, wobei S_n die Menge aller Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$ und $\circ$ die Funktionskomposition ist.

Lösung:

a) PKP($(\mathbb{N}, +, 0)$) ist entscheidbar.

Sei $I = \{[x_1/y_1], \ldots, [x_n/y_n]\}$ eine Instanz von PKP($(\mathbb{N}, +, 0)$), also eine Menge von Dominos mit Beschriftungen aus $\mathbb{N}$. Dann hat I eine korrespondierende Folge genau dann, wenn I einen Domino der Form $[k/k]$ für ein $k \in \mathbb{N}$ enthält oder zwei Dominos $[x/y]$ und $[x'/y']$ mit $x < y$ und $x' > y'$ enthält.

Dafür bemerken wir zunächst, dass andernfalls nur Dominos existieren, deren obere Beschriftung strikt größer (oder strikt kleiner) als ihre untere Beschriftung ist. Folglich gilt für jede Folge solcher Dominos, dass die Summe der oberen Beschriftungen strikt größer (oder strikt kleiner) als die Summe der unteren Beschrigungen ist, weswegen derartige Instanzen keine korrespondierende Folge von Dominos besitzen.

Falls I einen Domino der Form $[k/k]$ enthält, so existiert offensichtlich eine korrespondierende Folge. Nehmen wir also nun an, dass I zwei Dominos $D_1 = [x/y]$ und $D_2 = [x'/y']$ mit $x < y$ und $x' > y'$ enthält. Wir setzen $d_1 = x - y < 0$ und $d_2 = x' - y' > 0$ und $k = |d_1 \cdot d_2|$. Dann sind sowohl $|d_1|$ als auch $|d_2|$ Teiler von k, und es gilt

$$d_2 \cdot \frac{k}{|d_1|} - d_1 \cdot \frac{k}{|d_2|} = 0.$$

Wir betrachten nun eine beliebige Folge bestehend aus $k/|d_1|$ Dominos der Form D_2 und $k/|d_2|$ Dominos der Form D_1. Entsprechend ist die Differenz der Summe der oberen Beschriftung und der Summe der unteren Beschriftung

$$(x - y) \cdot \frac{k}{|d_2|} + (x' - y') \cdot \frac{k}{|d_1|} = 0$$

nach unserer Vorüberlegung, und somit ist eine solche Folge von Dominos korrespondierend.

Da das anfangs genannte Kriterum entscheidbar ist, folgt sofort, dass PKP$((\mathbb{N}, +, 0))$ entscheidbar ist.

b) PKP$((S_n, \circ, \mathrm{id}))$ ist entscheidbar.

Sei $\pi \in S_n$ beliebig. Da S_n eine Gruppe der Größe $n!$ ist, folgt, dass $\pi^{n!} = \pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi$ ($n!$ Hintereinanderausführungen von π) die Identität auf $\{1, \ldots, n\}$ ist. Insbesondere ist also jede Folge bestehend aus $n!$ gleichen Dominos korrespondierend, und jede (nichtleere) Instanz von PKP$((S_n, \circ, \mathrm{id}))$ ist eine Ja-Instanz.

Aufgabe 6 (WHILE-Programmierung) 5 Punkte

Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches die Funktion

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

berechnet. Erklären Sie die Funktionsweise Ihres Programms.

Hinweis: Sie können den Befehl $x_i \coloneqq [\![x_j = x_k]\!]$ für beliebige Variablen x_i, x_j, x_k verwenden, der mit den Lösungen der Tutoriumsaufgabe 2 implementiert werden kann. Weiterhin können sie den Befehl aus Tutoriumsaufgabe 2(b) nutzen.

Lösung:

Das WHILE-Programm

$$\begin{array}{l}
x_2 \coloneqq x_1 + 0; \\
\mathsf{WHILE}\ x_2 \neq 0\ \mathsf{DO} \\
\quad // \text{ Berechne } x_5 = x_2 \cdot x_2 \\
\quad x_3 \coloneqq x_2 + 0; \\
\quad \mathsf{WHILE}\ x_3 \neq 0\ \mathsf{DO} \\
\quad\quad x_4 \coloneqq x_2 + 0; \\
\quad\quad // \text{ Berechne } x_5 = x_5 + x_2 \\
\quad\quad \mathsf{WHILE}\ x_4 \neq 0\ \mathsf{DO} \\
\quad\quad\quad x_5 \coloneqq x_5 + 1; \\
\quad\quad\quad x_4 \coloneqq x_4 - 1 \\
\quad\quad \mathsf{END}; \\
\quad\quad x_3 \coloneqq x_3 - 1 \\
\quad \mathsf{END}; \\
\quad // \text{ Teste, ob } x_5 = x_1 \text{ und setze ggf. die Hilfsvariable } x_7 \text{ auf 1 (nutze } x_{10} = 0) \\
\quad x_6 = [\![x_5 = x_1]\!]; \\
\quad \mathsf{IF}\ x_6 = 1\ \mathsf{THEN} \\
\quad\quad x_7 = x_{10} + 1 \\
\quad \mathsf{END}; \\
\quad x_2 \coloneqq x_2 - 1 \\
\mathsf{END}; \\
x_0 \coloneqq x_7; \\
// \text{ Teste, ob } x_1 = 0 \text{ und gebe ggf. 1 aus} \\
\mathsf{IF}\ x_1 = 0\ \mathsf{THEN} \\
\quad x_0 = x_{10} + 1 \\
\mathsf{END}
\end{array}$$

berechnet die gegebene Funktion.

Das Programm berechnet auf der Eingabe $x_1 = n$ iterativ die Quadratzahlen $n^2, (n-1)^2, \ldots, 1^2$ (Zeilen 3 bis 13). In jedem Schritt der äußersten Schleife wird dann geprüft, ob die gerade berechnete Quadratzahl gleich n ist und in diesem Fall speichern wir in einer Hilfsvariable, dass die Eingabe eine Quadratzahl ist (Zeilen 14 bis 18). Die Hilfsvariable wird somit in der Schleife genau dann auf 1 gesetzt, falls n eine Quadratzahl größer 1 ist. Wird das Schleifenende erreicht, so testen wir noch ob $n = 0$ gilt (womit n eine Quadratzahl ist) und geben ansonsten den Wert der Hilfsvariable aus (Zeile 21 bis 25).

Aufgabe 7 (Semi-Entscheidbarkeit) **6 (3 + 3) Punkte**

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils an, ob sie entscheidbar sind. Geben Sie ausserdem an, ob die Sprachen und ihre Komplemente semi-entscheidbar sind. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

a) $L_1 = \{\langle M\rangle w \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$

b) $L_2 = \{\langle M\rangle \mid M \text{ erreicht auf jeder Eingabe den Zustand } q_7\}$

Lösung:

a) L_1 ist nicht entscheidbar, und auch nicht semi-entscheidbar.

Um dies zu zeigen, reduzieren wir $\overline{H}$ auf L_1. Dazu definieren wir die folgende Reduktionsabbildung

$$f(w) = \begin{cases} \langle M^*\rangle w', & \text{falls } w = \langle M\rangle w' \\ \langle M_0\rangle, & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

wobei M_0 eine TM ist, welche jede Eingabe verwirft, und M^* eine TM ist, welche auf jeder Eingabe die TM M simuliert und akzeptiert, falls M hält. Die Funktion f ist berechenbar.

Betrachten wir zunächst eine Eingabe w, welche nicht mit einer Gödelnummer beginnt. Dann gilt $w \notin H$ und somit $w \in \overline{H}$; es gilt also $f(w) = \langle M_0\rangle$ und da M_0 insbesondere das leere Wort nicht akzeptiert, gilt $f(w) \in L_1$.

Nun betrachten wir Eingaben der Form $\langle M\rangle w'$. Dann gilt $f(\langle M\rangle w) = \langle M^*\rangle w'$, und M^* akzeptiert w' nach Konstruktion genau dann nicht, wenn M auf w' nicht hält. Folglich gilt $f(\langle M\rangle w') \in L_1$ genau dann, wenn $\langle M\rangle w' \in \overline{H}$ gilt.

Damit folgt $\overline{H} \leq L_1$, und somit ist L_1 weder entscheidbar noch semi-entscheidbar.

Das Komplement von L_1 ist hingegen semi-entscheidbar. Wir geben ein Verfahren an, welches $\overline{L_1}$ erkennt:

- Ist die Eingabe nicht von der Form $\langle M\rangle w$, so akzeptieren wir.
- Ansonsten ist die Eingabe von der Form $\langle M\rangle w$, und wir simulieren M auf der Eingabe w.
- Hält die Simulation, so akzeptieren wir, falls M die Eingabe w akzeptiert hat; andernfalls verwerfen wir.

Betrachten wir zunächst eine Eingabe w, welche nicht mit einer Gödelnummer beginnt. Dann ist $w \notin L_1$ und somit $w \in \overline{L_1}$, und das Verfahren akzeptiert w korrekterweise.

Ist die Eingabe von der Form $\langle M\rangle w$, so gilt $\langle M\rangle w \in \overline{L_1}$ genau dann, wenn M die Eingabe w akzeptiert. Da unser Verfahren in diesem Fall akzeptiert, behandeln wir auch solche Eingaben korrekt.

Somit erkennt unser Verfahren das Komplement von L_1, und folglich ist $\overline{L_1}$ semi-entscheidbar.

b) Die Sprache L_2 ist nicht semi-entscheidbar und somit auch nicht entscheidbar.

Um dies zu zeigen, reduzieren wir das allgemeine Halteproblem H_{all} auf L_2. Wir definieren die Reduktionsabbildung

$$f(w) = \begin{cases} \langle M^* \rangle, & \text{falls } w = \langle M \rangle \\ w, & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

wobei M^* eine aus M konstruierte TM ist, welche sich wie folgt verhält:

- M^* verhält sich wie M, nutzt aber statt q_7 einen Zustand q_k, welcher nicht in M genutzt wird.
- Wir ersetzen in M^* alle Transitionen in den Endzustand durch Transitionen in q_7.
- Alle Transitionen von q_7 aus sind accept.

Die Funktion f ist berechenbar.

Betrachten wir zunächst eine beliebige Eingabe w, welche keine Gödelnummer ist. Dann ist $w \notin H_{\text{all}}$ und $w = f(w) \notin L_2$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$. Dann erreicht M^* auf jeder Eingabe den Zustand q_7 genau dann, wenn M auf jeder Eingabe hält. Folglich gilt $\langle M \rangle \in H_{\text{all}}$ genau dann, wenn $\langle M^* \rangle = f(\langle M \rangle) \in L_2$ gilt.

Somit ist unsere Reduktion korrekt, und es gilt $H_{\text{all}} \leq L_2$, weswegen L_2 nicht (semi-)entscheidbar ist. Bekanntermaßen haben wir damit aber auch $\overline{H_{\text{all}}} \leq \overline{L_2}$ und es folgt, dass auch $\overline{L_2}$ nicht semi-entscheidbar ist.