23SS Stocha PÜ 0

Aufgabe W 1

Gegeben seien die Intervalle $A = [-2, 5]$, $B = [1, 8]$ und $C = [-10, 3]$. Bestimmen Sie:

(i) $B \cap C$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $B \setminus C$,

$B \cap C$: [1,3]
$A \cup C$: [-10,5]
$A \setminus C$: (3,5]
$B \setminus C$: (3, 8]

(ii) $(A \cup B) \cap C$, $C \setminus (A \cap B)$.

$A \cup B$: [-2,8]
$(A \cup B) \cap C$: [-2,3]

$A \cap B$: [1,5]
$C \setminus (A \cap B)$: [-10,1)

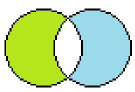
Aufgabe W 2

Gegeben seien zwei Teilmengen A und B der Grundmenge Ω, also $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$. Dann ist die *symmetrische Differenz* von A und B definiert durch

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) .$$

(a) Veranschaulichen Sie sich mit Hilfe eines Venn-Diagramms (Mengen-Diagramms) die Gültigkeit der folgenden Mengen-Gleichung:

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) .$$



(b) Was ergibt sich speziell für die symmetrische Differenz $A \,\Delta\, B$,

(i) wenn A und B disjunkt sind (d.h. wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt),

Dann ist es $A \cup B$, da $A \cup B \setminus \emptyset = A \cup B$

(ii) wenn $B = A^c$ ist, wobei $A^c = \Omega \setminus A$ gilt?

$$\begin{aligned} A \triangle A^c &= (A \cup A^c) \setminus (A \cap A^c) \\ &= \Omega \setminus \emptyset = \Omega \end{aligned}$$

Aufgabe W 3

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der folgenden konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \to \infty$:

(i) $a_n = \frac{2n^3}{8(n^3 - n^2 - n)}$,

$$|a_n| = \left| \frac{2n^3}{8(n^3 - n^2 - n)} \right| = \frac{2}{8\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{4\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} \approx \frac{1}{4}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt

(ii) $a_n = \frac{(2n-2)(n-4)}{4n-n^2}$.

$$|a_n| = \left|\frac{(2n-2)(n-4)}{4n-n^2}\right| = \frac{(2n-2)(n-4)}{4n-n^2} = \frac{2n^2-10n+8}{4n-n^2} = \frac{2-\frac{10}{n}+\frac{8}{n^2}}{\frac{4}{n}-1} \approx -2$$

Aufgabe W 4

Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k-5}{8^k},$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k-5}{8^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{8^k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{8^k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{8^k} - 5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8^k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{8}\right)^k - 5\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 5\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 - 5\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k + 5 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 5\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k + 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Sn &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 5\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k + 4 \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{5}{1-\frac{1}{8}} + 4 \\
&2 - \frac{40}{7} + 4 = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

Aufgabe W 5

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx$

$\int_0^1 x^2e^{-2x}\,dx = \int_0^1 f'(x) * g(x)\,dx$ mit $f'(x) = e^{-2x}$ und $g(x) = x^2$

$f(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ und $g'(x) = 2x$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{-2}e^{-2x} * x^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{-2}e^{-2x} * 2x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2} + \int_0^1 e^{-2x}x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2} + \left[\frac{1}{-2}e^{-2x} * x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2} + -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx
\end{aligned}$$

$$= -e^{-2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^1$$
$$= -e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$$

(b) $\int_3^5 \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

$$\int_3^5 \frac{2x+1}{x^2+x}dx$$

$$f(x) := 1$$
$$g(x) := x^2 + x$$

$$\int_3^5 \frac{2x+1}{x^2+x}dx = \int_3^5 \frac{1}{x^2+x} * (2x+1)$$
$$\int_a^b f\big(g(x) * g'(x)\big) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$$

$$g(a) = g(3) = 3^2 + 3 = 12$$
$$g(b) = g(5) = 5^2 + 5 = 30$$

$$\int_{12}^{30} \frac{1}{t} = [\log(t)]_{12}^{30}$$
$$= \log(30) - \log(12) = \log\left(\frac{30}{12}\right) = \log\left(\frac{5}{2}\right)$$