Prof. Dr. A. Steland
N. Mause RWTH Aachen, SS 2023

Ausgabe: 04. Juli 2023 Kleingruppenübungen: vom 11.07 bis zum 14.07

Einführung in die angewandte Stochastik

Kleingruppenübung 10

Quantilstabellen mit den Werten zur Normalverteilung, der t-Verteilung und der χ^2 - Verteilung befinden sich am Ende dieses Übungsblattes.

Aufgabe 38

Die monatliche Niederschlagsmenge (in mm) an einem bestimmten Messpunkt kann durch eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$–verteilte Zufallsvariable mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ beschrieben werden.

Aus 60 unabhängig voneinander gemessenen Niederschlagsmengen $x_1, \dots, x_{60}$ wurde die folgende Stichprobenvarianz berechnet:

$$\widehat{\sigma}^2 \;=\; \frac{1}{59} \sum_{i=1}^{60} (x_i - \overline{x})^2 \;=\; 81.7 \;\; (\mathrm{mm}^2) \; .$$

(a) Bestimmen Sie ein einseitiges oberes 90%–Konfidenzintervall für σ^2.

(b) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$

die Hypothese $H_0 \,:\, \sigma^2 \leq 60$ gegen die Alternative $H_1 \,:\, \sigma^2 > 60$.

Aufgabe 39

Ein Unternehmer vertritt die Meinung, dass ein von ihm eingeführtes Geschäftsmodell den Umsatz seines Unternehmens gesteigert hat. Vor der Einführung des Modells hat das Unternehmen einen Umsatz von durchschnittlich 24 500 € pro Monat erwirtschaftet. In den acht Monaten seit Einführung des neuen Modells wurden folgende monatlichen Umsätze (in €) erzielt:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8
Umsatz	23 900	25 500	25 100	24 500	26 200	25 300	24 100	25 900

(a) Bestimmen Sie einen geeigneten Test zur Überprüfung der Aussage des Unternehmers. Gehen Sie hierbei davon aus, dass man die Monatsumsätze als Realisationen stochastisch unabhängiger, jeweils $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$–verteilter Zufallsvariablen mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ansehen kann.

(b) Können Sie die Aussage des Unternehmers bei obigen Daten zum Niveau $\alpha = 0.05$ bestätigen?

Aufgabe 40

Ein Unternehmen produziert elektronische Bauteile, die von dem Mitarbeiter Herr A. von Hand in Kartons verpackt werden müssen. An vier Arbeitstagen wurde Herr A. jeweils gefragt, wie viele Bauteile er verpackt hat und wie viel Zeit er dafür jeweils benötigt hat. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle dargestellt:

Anzahl Kartons	2	4	2	4
benötigte Zeit t (in Stunden)	4	2	3	2

(a) Berechnen Sie aus den gegebenen Daten die zugehörige geschätzte Regressionsgerade

$$\hat{f}(t) = \hat{a} + \hat{b}t, \quad t \in I,$$

zur Erklärung der Anzahl verpackter Kartons in Abhängigkeit von der benötigten Zeit t, wobei die Koeffizienten $\hat{a}$ und $\hat{b}$ aus der Methode der kleinsten Quadrate resultieren. Geben Sie den Definitionsbereich I der geschätzten Regressionsgerade $\hat{f}$ explizit an.

(b) In der nächsten Woche muss Herr A. 3 Kartons verpacken müssen. Wie viel Zeit wird er dafür benötigen?

Standardnormalverteilung

Verteilungsfunktion $\Phi(x+h)$

x	h = 0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981

Beispiel: $X \sim \mathcal{N}(3{,}9)$,

$$P(X \leq 4.26) = P\left(\frac{X-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{4.26-3}{3}\right) = P(X \leq 0.42) = 0.6628$$

t-Verteilung

q-Quantile der $t(df)$-Verteilung						
			q			
df	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	15.895	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750
31	1.309	1.696	2.040	2.144	2.453	2.744
32	1.309	1.694	2.037	2.141	2.449	2.738

Beispiel: $X \sim t(8)$,

$$P(X \leq c) = 0.95 \ \Rightarrow c = 1.860$$

χ^2 **- Verteilung**

q-Quantile der $\chi^2(df)$-Verteilung						
	q					
df	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
36	47.212	50.998	54.437	55.489	58.619	61.581
37	48.363	52.192	55.668	56.730	59.893	62.883
38	49.513	53.384	56.896	57.969	61.162	64.181
39	50.660	54.572	58.120	59.204	62.428	65.476
40	51.805	55.758	59.342	60.436	63.691	66.766
41	52.949	56.942	60.561	61.665	64.950	68.053
42	54.090	58.124	61.777	62.892	66.206	69.336
43	55.230	59.304	62.990	64.116	67.459	70.616
44	56.369	60.481	64.201	65.337	68.710	71.893
45	57.505	61.656	65.410	66.555	69.957	73.166
46	58.641	62.830	66.617	67.771	71.201	74.437
47	59.774	64.001	67.821	68.985	72.443	75.704
48	60.907	65.171	69.023	70.197	73.683	76.969
49	62.038	66.339	70.222	71.406	74.919	78.231
50	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490
51	64.295	68.669	72.616	73.818	77.386	80.747
52	65.422	69.832	73.810	75.021	78.616	82.001
53	66.548	70.993	75.002	76.223	79.843	83.253
54	67.673	72.153	76.192	77.422	81.069	84.502
55	68.796	73.311	77.380	78.619	82.292	85.749
56	69.919	74.468	78.567	79.815	83.513	86.994
57	71.040	75.624	79.752	81.009	84.733	88.236
58	72.160	76.778	80.936	82.201	85.950	89.477
59	73.279	77.931	82.117	83.391	87.166	90.715
60	74.397	79.082	83.298	84.580	88.379	91.952
61	75.514	80.232	84.476	85.767	89.591	93.186
62	76.630	81.381	85.654	86.953	90.802	94.419
63	77.745	82.529	86.830	88.137	92.010	95.649
64	78.860	83.675	88.004	89.320	93.217	96.878
65	79.973	84.821	89.177	90.501	94.422	98.105
66	81.085	85.965	90.349	91.681	95.626	99.330
67	82.197	87.108	91.519	92.860	96.828	100.554
68	83.308	88.250	92.689	94.037	98.028	101.776
69	84.418	89.391	93.856	95.213	99.228	102.996
70	85.527	90.531	95.023	96.388	100.425	104.215