KGÜ 10

A38

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$n = 60$: $X_1, \dots, X_{60}$: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{59} \sum_{i=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2 = 81.7 \,(mm^2)$

a) einseitiges oberes 90%-KI für σ^2.

$X_1, \dots, X_{60}$, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, 60$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

einseitiges $(1-\alpha)$-KI für σ^2:

$K = \left[\frac{n-1}{\chi^2(n-1)_{1-\alpha}} \hat{\sigma}^2, \infty\right)$, $\chi^2(n-1)_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil zu $\chi^2(n-1)$

χ^2 Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden

$n = 60$
$1 - \alpha = 0.9$
$\hat{\sigma}^2 = 81{,}7$
$\chi^2(59)_{0.9} = 73.279$

$\Rightarrow K = \left(\frac{59}{73.279} \cdot 81{,}7, \infty\right) = [65.78, \infty)$

S.72

b) Signifikanzniveau: $\alpha = 10\%$.

Hypothese: $\sigma^2 \leq 60$ gegen Alternative $H_1: \sigma^2 > 60$.

$H_0: \sigma^2 \leq 60$ gegen $H_1: \sigma^2 > 60$

Verwerfe H_0, falls $\hat{\sigma}^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi^2(n-1)_{1-\alpha}$

$n = 60$, $\sigma_0^2 = 60$, $\hat{\sigma}^2 = 81.7$

$\Rightarrow \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi^2(n-1)_{1-\alpha} = \frac{60}{59} \chi^2(59)_{0.9} \overset{\text{a.a.}}{=} 74.521$

$\hat{\sigma}^2 = 81.7 > 74.521 = \frac{60}{59} \chi^2(59)_{0.9} \Rightarrow H_0$ wird abgelehnt.

A39

24.500 €/Monat

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

$x_1, \dots, x_8$ s.u. $X_1, \dots, X_8$, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, 8$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

S.70

a) einseitiger t-Test, da σ unbekannt ist

b) S.71.

$H_0: \mu \leq 24.500$ gegen $H_1: \mu > 24.500$

$$T = \sqrt{n} \, \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}$$

$$s = \frac{1}{n-1} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$n = 8$, $\mu_0 = 24.500$, $\alpha = 0.05$, $\bar{x} = 25062.5$, $s \approx 831.414$

$$\Rightarrow T = \sqrt{8} \, \frac{25062.5 - 24.500}{831.414} \approx 1.914.$$

$$t(n-1)_{1-\alpha} = t(7)_{0.95} \overset{\text{Tab.}}{=} 1.895$$

$T \approx 1.914 > 1.895 = t(7)_{0.95} \Rightarrow H_0$ wird abgelehnt

Die Aussage des Unternehmers kann zum Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ statistisch bestätigt werden (bei den gegebenen Daten).

A40

# Kartons	2	4	2	4
Zeit t (in Stunden)	4	2	3	2

a) $\hat{f}(t) = \hat{a} + \hat{b}\, x,\ x \in J$

x := benötigte Zeit:
y = # Kartons

4	2	3	2
2	4	2	4

$\bar{x} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} y_i = \frac{1}{4}(4+2+3+2) = \frac{11}{4}$

$\bar{y} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i = \frac{1}{4}(2+4+2+4) = \frac{12}{4} = 3.$

$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 4\cdot2 + 2\cdot4 + 3\cdot2 + 2\cdot4 = 8+8+6+8 = 30$

$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 4^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 = 16+4+9+4 = 33.$

$n = 4$:

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\cancel{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2} =$$

$$= \frac{30 - 4\cdot\frac{11}{4}\cdot 3}{33 - 4\cdot\left(\frac{11}{3}\right)^2} = \frac{27}{187}$$

$\cancel{\hat{a} = \bar{y}}$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\cdot\bar{x} = 3 - \frac{27}{187}\cdot\frac{11}{4} = \frac{117}{68}$$

$$\hat{f}(t) = \hat{a} + \hat{b}\cdot t = \frac{177}{68} + \frac{27}{187}\, t,\ t \in [x_{min}, x_{max}] = [2;4].$$

$\Downarrow$

gibt # Kartons in Abh. von der benötigten Zeit an.

b) 3 Kartons verpacken. Wie viel Zeit?

$$\hat{f}(t) = \frac{177}{68} + \frac{27}{187} t \stackrel{!}{=} 3 \Leftrightarrow t = \frac{11}{4} = 2.75.$$