23SS Stocha PÜ 1

2023年4月11日 23:22

Aufgabe 1

Bei einer medizinischen Untersuchung wird der gesundheitliche Zustand von Studenten zweier Fachrichtungen verglichen. Dabei werden die an der Untersuchung teilnehmenden Personen in Männer und Frauen sowie in Informatikstudenten und Mathematikstudenten eingeteilt. Die Menge der Männer wird mit A bezeichnet, die Menge der Informatikstudenten mit B.

Welche Personen werden durch die folgenden Mengen beschrieben?

(a) B^c,

$B^c :=$Mathematikstudenten

(b) $A \cap B$,

$A \cap B :=$ Männer aus Informatikstudenten

(c) $B \setminus A$,

$B \setminus A := B \cap A^c :=$ Frauen aus Informatikstudenten

(d) $(A \cup B)^c$,

$A^c \cap B^c =$Frauen aus Mathematikstudenten

(e) $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$.

$$\begin{aligned}(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c) \cup (B^c \cap B)\\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c) \cup \emptyset\\ &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\end{aligned}$$

Männer aus Informatikstudenten oder Frauen aus Mathematikstudenten

Aufgabe 2

Bei einem Internetspiel wird ein virtueller unsymmetrischer (sechsseitiger) Würfel geworfen. Man interessiert sich für die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die einzelnen Augenzahlen geworfen werden. Es sind aber lediglich zu den Ereignissen

(i) $A =$ „es wird eine gerade Zahl geworfen“,

(ii) $B =$ „es wird eine Augenzahl kleiner oder gleich 3 geworfen“,

(iii) $C =$ „es wird eine 1 oder eine 4 geworfen“

die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$P(A) = \frac{5}{8}, \quad P(C) = \frac{5}{12},$$
$$P(A \cup B) = \frac{23}{24}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap C) = \frac{1}{3}.$$

Berechnen Sie aus diesen Angaben $p_i = P(\{i\})$ für $i = 1, ..., 6$.

$A := \{2,4,6\}$
$B := \{1,2,3\}$
$C := \{1,4\}$

$P(A \cup B) = \{1,2,3,4,6\} = \frac{23}{24}$; $D.h. P(\{5\}) = \frac{1}{24}$

$P(A \cap B) = \{2\} = \frac{1}{6} = \frac{4}{24}$

$P(A \cap C) = \{4\} = \frac{1}{3} = \frac{8}{24}$

$P(A) = \{2,4,6\} = \frac{5}{8} = \frac{15}{24}$; $\text{D.h.}\, \text{P}(\{6\}) = \frac{15}{24} - \frac{4}{24} - \frac{8}{24} = \frac{3}{24}$

$P(C) = \{1,4\} = \frac{5}{12} = \frac{10}{24}$; $D.h\, P(\{1\}) = \frac{10}{24} - \frac{8}{24} = \frac{2}{24}$

$P(\{1\}) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

$P(\{2\}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

$P(\{4\}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$P(\{5\}) = \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$

$P(\{6\}) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$P(\{3\}) = 1 - P(\{1,2,4,5,6\}) = 1 - \frac{2}{24} - \frac{4}{24} - \frac{8}{24} - \frac{1}{24} - \frac{3}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 3

Eine faire Münze (d.h. die Auftretenswahrscheinlichkeiten von Kopf und Zahl sind identisch) werde sieben Mal hintereinander geworfen.

(a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge für dieses Experiment an.

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7) |\, für\ 1 \le i \le 7;\ \omega_i \in \{K, Z\}\}$

(b) Wie viele mögliche Versuchsausgänge gibt es?

$2^7 = 128$ Möglichkeiten

(c) Beschreiben Sie die nachstehenden Ereignisse als Teilmengen von Ω und berechnen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten:

(i) *Genau sechs der sieben Münzwürfe ergeben Zahl.*

$A = \{(K,Z,Z,Z,Z,Z,Z), (Z,K,Z,Z,Z,Z,Z), (Z,Z,K,Z,Z,Z,Z), (Z,Z,Z,K,Z,Z,Z), (Z,Z,Z,Z$
$(Z,Z,Z,Z,Z,K,Z), (Z,Z,Z,Z,Z,Z,K)$

$\frac{7}{128}$

(ii) *Mindestens sechs der sieben Münzwürfe ergeben Zahl.*

$B = \{(K,Z,Z,Z,Z,Z,Z), (Z,K,Z,Z,Z,Z,Z), (Z,Z,K,Z,Z,Z,Z), (Z,Z,Z,K,Z,Z,Z), (Z,Z,Z,Z$
$(Z,Z,Z,Z,Z,K,Z), (Z,Z,Z,Z,Z,Z,K), (Z,Z,Z,Z,Z,Z,Z)$

$\frac{8}{128}$

(iii) *In zwei aufeinander folgenden Würfen fällt Kopf oder in zwei aufeinander folgenden Würfen fällt Zahl.*

Mit Gegenwahrscheinlichkeit

$C^c = \{(K,Z,K,Z,K,Z,K), (Z,K,Z,K,Z,K,Z)\}$

$1 - \frac{2}{128} = \frac{63}{64}$