Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS 2023

Ausgabe: 25. April 2023 ——— Kleingruppenübungen: vom 02.05 bis zum 05.05

Einführung in die angewandte Stochastik

Kleingruppenübung 2.5

Bitte beachten Sie, dass die Kleingruppen am Dienstag, den 02. Mai, von 12:30 - 14:00 Uhr, aufgrund der Fachschaftsvollversammlung ausfallen.

Aufgabe 8

Vier unverfälschte Würfel mit den Ziffern $1, \ldots, 6$ werden gleichzeitig geworfen. Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet:

$$\begin{aligned} A &\mathrel{\widehat{=}} \text{„Es fallen genau zwei Einsen“} \\ B &\mathrel{\widehat{=}} \text{„Die Augensumme beträgt 6.“} \\ C &\mathrel{\widehat{=}} \text{„Es fallen genau zwei Sechsen.“} \\ D &\mathrel{\widehat{=}} \text{„Die Augensumme beträgt 22.“} \end{aligned}$$

(a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω sowie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß P für diese Situation an, und beschreiben Sie formal die Ereignisse A und B als Teilmengen von Ω.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$$A, \quad B, \quad A \cap C, \quad A \cap D, \quad C \cap D, \quad B \cup C.$$

(c) Sind die Ereignisse A und C stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und drei Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{F}$ mit $P(B \cap C) > 0$ und $P(B) < 1$. Betrachten Sie hierzu die folgenden Aussagen:

(1) Es gilt $P(A \,|\, B^c) + P(A \,|\, B) = 1$.

(2) Es gilt $P(A^c \,|\, B) + P(A \,|\, B) = 1$.

(3) Es gilt $P(A \cap B \,|\, C) = P(A \,|\, B \cap C)\, P(B \,|\, C)$.

(4) Falls $P(C) = 1$ gilt, folgt $P(A \cap C) = P(A)$.

(5) Aus $P(C) = 1$ folgt $C = \Omega$.

Weisen Sie jeweils die Gültigkeit der betreffenden Aussage nach, oder widerlegen Sie die Aussage durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.

Aufgabe 10

Sei $K = \{1, \ldots, k\}$ die Menge der natürlichen Zahlen bis k, und $\Omega = K \times K = \{(i,j) : 1 \leq i, j \leq k\}$. Auf der Menge $\mathcal{A} = Pot(\Omega)$ sei P die diskrete Gleichverteilung auf Ω. Es handelt sich also um einen Laplace-Raum.

(a) Geben Sie ein reales Beispiel, dass durch obiges Modell beschrieben werden kann.

(b) Bestimmen sie $P(A)$ für $A = \{(1,j) : j \in K\}$ und $P(B)$ für $B = \{(j,1) : j \in K\}$. Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig?

(c) Betrachten Sie die Menge $C = \{(i,j) \in \Omega : i \leq 2\}$. Sind A und C stochastisch unabhängig? Für welche Werte k gilt das?

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich das Modell durch eine Skizze. Wie lassen sich die Mengen A, B, C darstellen?