23SS Stocha PÜ 2.5

Aufgabe 8

Vier unverfälschte Würfel mit den Ziffern $1, \ldots, 6$ werden gleichzeitig geworfen. Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet:

$$A \mathrel{\widehat{=}} \text{„Es fallen genau zwei Einsen"}$$
$$B \mathrel{\widehat{=}} \text{„Die Augensumme beträgt 6."}$$
$$C \mathrel{\widehat{=}} \text{„Es fallen genau zwei Sechsen."}$$
$$D \mathrel{\widehat{=}} \text{„Die Augensumme beträgt 22."}$$

(a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω sowie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß P für diese Situation an, und beschreiben Sie formal die Ereignisse A und B als Teilmengen von Ω.

A: Genau 2 Einsen

$A = \{(1,1,u,v), (1,u,1,v), (1,u,v,1), (u,1,1,v), (u,1,v,1), (u,v,1,1)\}$ *wobei* $u, v \in \{2,3,4,5,6\}$

$|A| = 6 * 5^2 = 150$

B: Augensumme:6

$$B = \left\{\begin{matrix} (1,1,1,3), (1,1,3,1), (1,3,1,1), (3,1,1,1), \\ (1,1,2,2), (1,2,1,2), (1,2,2,1), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1) \end{matrix}\right\}$$

$|B| = 10$

C: Genau 2 Sechsen

Analog nach A

$|C| = 150$

D: Augensumme 22

$$D = \left\{\begin{matrix} (6,6,6,4), (6,6,4,6), (6,4,6,6), (4,6,6,6), \\ (6,6,5,5), (6,5,6,5), (6,5,5,6), (5,6,6,5), (5,6,5,6), (5,5,6,6) \end{matrix}\right\}$$

$|D| = 10$

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$$A, \quad B, \quad A \cap C, \quad A \cap D, \quad C \cap D, \quad B \cup C.$$

$|\Omega| = 6^4 = 1296$

A: Genau 2 Einsen

$A = \{(1,1,u,v), (1,u,1,v), (1,u,v,1), (u,1,1,v), (u,1,v,1), (u,v,1,1)\}$ *wobei* $u, v \in \{2,3,4,5,6\}$

$|A| = 6 * 5^2 = 150$

$$P(A) = \frac{150}{1296} = 0{,}116$$

B: Augensumme:6

$$B = \left\{\begin{matrix} (1,1,1,3), (1,1,3,1), (1,3,1,1), (3,1,1,1), \\ (1,1,2,2), (1,2,1,2), (1,2,2,1), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1) \end{matrix}\right\}$$

$|B| = 10$

$$P(B) = \frac{10}{1296}$$

$A \cap C$: Genau 2 Einsen und 2 Sechsen

$A \cap C = \{(1,1,6,6), (1,6,1,6), (1,6,6,1), (6,1,1,6), (6,1,6,1), (6,6,1,1)\}$

$$P(A \cap C) = \frac{6}{1296} = \frac{2}{423}$$

$A \cap D$: Genau 2 Einsen und Ausgensumme 22

$A \cap D = \emptyset$

$P(A \cap D) = 0$

$C \cap D$: Genau 2 Sechsen und Augensumme 22
$C \cap D = \{(6,6,5,5), (6,5,6,5), (6,5,5,6), (5,6,6,5), (5,6,5,6), (5,5,6,6)\}$
$P(C \cap D) = \frac{6}{1296}$

$B \cup C$: Augensumme 6 oder genau 2 Sechsen
$|B \cup C| = |B| + |C| = 10 + 150$
$P(B \cup C) = \frac{160}{1296}$

(c) Sind die Ereignisse A und C stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Das ist abhängig, $P(A) * P(B) \neq P(A \cap C)$

$$\frac{150}{1296} * \frac{150}{1296} \neq \frac{6}{1296}$$

Aufgabe 9

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und drei Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{F}$ mit $P(B \cap C) > 0$ und $P(B) < 1$. Betrachten Sie hierzu die folgenden Aussagen:

(1) Es gilt $P(A \mid B^c) + P(A \mid B) = 1$.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{K} P(B|A_k)P(A_k)}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A|B^c) + P(A|B) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Angenommen ist A=0, dann ist alles 0 :)

(2) Es gilt $P(A^c \mid B) + P(A \mid B) = 1$.

$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A^c|B) + P(A|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + (A^c \cap B)}{P(B)}$

Behaupte: $P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B)$
$P(A \cap B) \cup P(A^c \cap B) = P(A \cup A^c) \cap P(B) = P(B)$

$P(A^c|B) + P(A|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + (A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)}$

(3) Es gilt $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid B \cap C)\, P(B \mid C)$.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{K} P(B|A_k)P(A_k)}.$$

$\Rightarrow$ Richtung

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$
$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} * \frac{P(B \cap C)}{P(B \cap C)}$$
$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} * \frac{P(B \cap C)}{P(B \cap C)}$$
$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$
$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} * P(B|C)$$
$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} * P(B|C)$$
$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$
$$P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C) * P(B|C)$$

$\Leftarrow$ Richtung

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$
$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$

$$P(A|B \cap C) * P(B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} * \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$
$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B|C)$$
$$P(A|B \cap C) * P(B|C) = P(A \cap B|C)$$

Also Wahr

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(B \cap C|A) * P(A)}{P(B \cap C)}$$

(4) Falls $P(C) = 1$ gilt, folgt $P(A \cap C) = P(A)$.

$P(C) = 1$
$P(\Omega) = 1$

$P(A \cap \Omega) = P(A)$
$P(A \cap \Omega) = P(A \cap C) = P(A)$

Also wahr

(5) Aus $P(C) = 1$ folgt $C = \Omega$.

Sei $\Omega = \{A, B, C\}$
Sei $P(C) = 1$ und $P(A) = 0$
$C \neq \Omega, da\ A \in \Omega$ aber $A \notin C$
Also wahr

Weisen Sie jeweils die Gültigkeit der betreffenden Aussage nach, oder widerlegen Sie die Aussage durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.

Aufgabe 10

Sei $K = \{1, \ldots, k\}$ die Menge der natürlichen Zahlen bis k, und $\Omega = K \times K = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq k\}$. Auf der Menge $\mathcal{A} = Pot(\Omega)$ sei P die diskrete Gleichverteilung auf Ω. Es handelt sich also um einen Laplace-Raum.

(a) Geben Sie ein reales Beispiel, dass durch obiges Modell beschrieben werden kann.

Mögliche Ereignisse, wenn zwei Würfeln geworfen sind.
$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2)\} = \{(\omega_1, \omega_2): 1 \leq \omega_1, \omega_2 \leq 6\}$

(b) Bestimmen sie $P(A)$ für $A = \{(1, j) : j \in K\}$ und $P(B)$ für $B = \{(j, 1) : j \in K\}$. Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig?

Das ist stochastisch abhängig.
$A = \{(1, \omega): \omega \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$
$B = \{(\omega, 1): \omega \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$
$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$
$B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$
$P(A) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$
$P(B) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$
$A \cap B = \{(1,1)\}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
$\frac{1}{36} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6}$

(c) Betrachten Sie die Menge $C = \{(i, j) \in \Omega : i \leq 2\}$. Sind A und C stochastisch unabhängig? Für welche Werte k gilt das?

Für k=6 ist es stochastisch abhängig

$$C = \left\{\begin{matrix}(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\end{matrix}\right\}$$

$P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$
$A \cap C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$
$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$
$P(A \cap C) = P(A) * P(C)$ gilt nicht! Da
$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} * \frac{1}{3}$

Für k=2 ist es Stochastisch unabhängig
$A = \{(1,1), (1,2)\}$
$C = \left\{\begin{matrix}(1,1), (1,2), \\ (2,1), (2,2)\end{matrix}\right\}$
$A \cap C = \{(1,1), (1,2)\}$
$P(A) = \frac{2}{4}$
$P(C) = \frac{4}{4}$
$P(A \cap C) = \frac{2}{4}$

$P(A \cap C) = P(A) * P(C)$ gilt!

Für beliebige k
$A = \{(1,1), (1, \dots), (1, k)\}$
$|A| = k$
$P(A) = \frac{k}{k^2}$

$C = \begin{Bmatrix} (1,1), (1, \dots), (1, k), \\ (2,1), (2, \dots), (2, k) \end{Bmatrix}$

$|C| = 2k$

$P(C) = \frac{2k}{k^2}$

$A \cap C = \{(1,1), (1, \dots), (1, k)\}$

$|A \cap C| = k$

$P(A \cap C) = \frac{k}{k^2}$

Wenn

$P(A \cap C) = P(A) * P(C)$

Gilt

Dann

$\frac{k}{k^2} = \frac{k}{k^2} * \frac{2k}{k^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k} * \frac{2}{k^2}$

$\Rightarrow 1 = 1 * \frac{2}{k}$

$\Rightarrow k = 2$

Also nur für k=2 ist es stochastisch unabhängig

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich das Modell durch eine Skizze. Wie lassen sich die Mengen A, B, C darstellen?