KGÜ 2.5

A8

4 unverfälschte Würfeln, Ziffern 1,…,6

$A \hat{=}$ g. 2 1en

$B \hat{=} \sum = 6$

$C \hat{=}$ g. 2 6en

$D \hat{=} \sum = 22$

a) $\Omega = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid w_i \in \{1,\dots,6\},\ i \in \{1,2,3,4\}\}$,

$|\Omega| = 6^4 = 1296$

W. unverfälscht => Laplace Experiment

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{1296}$, $\forall A \subset \Omega$.

→ $A \hat{=}$ "Es fallen genau 2 1en" =

$= \{\omega \in \Omega : \omega_i = \omega_j = 1$ für $i,j \in \{1,2,3,4\}$ mit $i \neq j$ und
$w_k \neq 1 \neq w_l$ für $k,l \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}$ mit $k \neq l\}$

$= \{(1,1,w_3,w_4), (1,w_2,1,w_4), (1,w_2,w_3,1), (w_1,1,1,w_4),$
$(w_1,1,w_3,1), (w_1,w_2,1,1) : w_i \in \{2,\dots,6\}, i \in \{1,2,3,4\}\}$.

$= A_{12} \cup A_{13} \cup A_{14} \cup A_{23} \cup A_{24} \cup A_{34}$, A_{mn} disjunkt,
$m,n \in \{1,2,3,4\}$
= Position der 1en

→ $B \hat{=}$ "Die Augensumme Beträgt 6" =

$= \{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 6\} =$

$= \{(1,1,1,3), (1,1,3,1), (1,3,1,1), (3,1,1,1),$
$(1,1,2,2), (1,2,1,2), (1,2,2,1), (2,1,1,2),$
$(2,1,2,1), (2,2,1,1)\}$.

b) Wahrscheinlichkeiten $A, B, A\cap C, A\cap D, C\cap D, B\cup C$ (2)

- $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{150}{1296} = \frac{25}{216}$

$\hookrightarrow |A| = 6\cdot |A_{12}| = \underbrace{6}_{\text{6 verschiedene Anordungen}}\cdot \underbrace{1\cdot 1}_{\text{genau 2 1en}}\cdot \underbrace{5\cdot 5}_{\text{5 Möglichkeiten übrig}} = 150$

- $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{10}{1296} = \frac{5}{648}$

- $A\cap C \hat{=}$ "Es fallen genau 2 1en und genau 2 6en".

$= \{\omega\in\Omega : \omega_i = \omega_j = 1,\ \omega_k = \omega_l = 6,\ i\neq j, i\neq k, i\neq l, j\neq k, j\neq l, k\neq l\}$

$= \{(1,1,6,6), (1,6,1,6), (1,6,6,1), (6,1,1,6), (6,1,6,1), (6,6,1,1)\}$

$P(A\cap C) = \frac{|A\cap C|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

- $A\cap D \hat{=}$ "Es fallen genau 2 1en und die Augensumme beträgt 22" $\neq \emptyset$

$P(A\cap D) = P(\emptyset) = 0$,

da wir genau zwei 1en haben und die beiden anderen W. max. eine 6 ergeben können, die Augensumme somit $\sum = 1+1+6+6 = 14$.

~~c) A und C stochastisch unabhängig?~~

- $C\cap D \hat{=}$ "Es fallen genau 2 6en und die $\sum = 22$". =

$= \{(6,6,5,5), (6,5,6,5), (6,5,5,6), (5,5,6,6), (5,6,5,6), (5,6,6,5)\}$

$P(C\cap D) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

$B \cup C \hat{=}$ "Die Augensumme beträgt 6 oder es fallen genau 2 6en"

3

$|B \cup C| = |B| + |C| = 10 + 150 = 160$

C wird genau so wie A bestimmt (statt "1" haben wir aber "6").

$B \cup C$ ist eine disjunkte Vereinigung

(mind 2 6en $\Rightarrow \Sigma$ = mind 14)

$\Rightarrow P(B \cup C) = \frac{|B \cup C|}{|\Omega|} = \frac{160}{1296} = \frac{10}{81}$

c) A, C stochastisch unabhängig?

A, C s.u falls $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$.

$P(A \cap C) = \frac{1}{216} \neq \frac{625}{46656} = \frac{25}{216} \cdot \frac{25}{216} \cdot \frac{25}{216}$

also A, C nicht s.u.

$\boxed{A9}$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$A, B, C \in \mathcal{F}$, $P(B \cap C) > 0$

$P(B) < 1$.

$P(B) \geq P(B \cap C) \overset{\text{Vor.}}{>} 0$

$P(C) \geq P(B \cap C) \overset{\text{Vor.}}{>} 0$

$P(B^c) = 1 - \underbrace{P(B)}_{<1} \overset{\text{Vor.}}{>} 0$

Alle bedingten W-keiten sind wohldefiniert

(1) $P(A|B^c) + P(A|B) = 1$. $\frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$. Was passiert wenn $A \cap B$ oder $A \cap B^c = \emptyset$ ist?

Falsch. Gegenbeispiel:

Seien: $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$, $E \subset \Omega$, P = diskrete Gleichverteilung auf Ω.

$A = \{1\}$, $B = \{2\}$; $B^c = \{1, 3\}$.

$P(A|B^c) + P(A|B) \overset{\text{Def}}{=} \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{\text{Laplace}}{=}$

$= \frac{|A \cap B^c|}{|B^c|} + \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|\{1\}|}{|\{1,3\}|} + \frac{|\emptyset|}{|\{2\}|} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \neq 1$

2) $P(A^c|B) + P(A|B) = 1$.

Richtig.

$$P(A^c|B) + P(A|B) =$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

($A^c \cap B$, $A \cap B$ -disjunkt)

$$= \frac{P((A^c \cap B) \cup (A \cap B))}{P(B)} =$$

$$\overset{\text{D-Ges.}}{=} \frac{P((A^c \cup A) \cap B)}{P(B)} \overset{A^c \cup A = \Omega}{=} \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) $P(A \cap B | C) = P(A | B \cap C) \cdot P(B|C) =$

Ja, denn:

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(\cancel{B \cap C})} \cdot \frac{P(\cancel{B \cap C})}{P(C)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B | C).$$

4) Falls $P(C) = 1$ gilt, folgt: $P(A \cap C) = P(A)$.

$P(C) = 1 \Rightarrow P(C^c) = 0$ und $P(C^c) \geq P(A \cap C^c)$ $\Rightarrow P(A \cap C^c) = 0$.

Ja, denn: $P(C^c) = 0 \Rightarrow P(A \cap C^c) = 0$,

$$0 \leq P(A \cap C^c) \leq P(C^c) = 1 - \underbrace{P(C)}_{=1} = 0$$

$$P(A \cap C) = P(A \cap C) + P(A \cap C^c) \overset{\text{Ereignisse}}{\underset{\text{dij}}{=}} P((A \cap C) \cup (A \cap C^c)) =$$

$$\overset{\text{D-Ges.}}{=} P(A \cap \underbrace{(C \cup C^c)}_{\Omega}) = P(A \cap \Omega) \overset{A \subsetneq \Omega}{=} P(A).$$

5) $P(C) = 1$ folgt $C = \Omega$.

Falsch. Seien: $\Omega : \{1,2\}$, $P: \mathrm{Pot}(\Omega) \to [0,1]$,

$P(\emptyset) = 0$, $P(\{1\}) = 0$, $P(\{2\}) = 1$, $P(\Omega) = 1$.

wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $\mathrm{Pot}(\Omega)$, Kol.-Axiome erfüllt

und: $C = \{2\} \neq \{1,2\} = \Omega$, $P(C) = P(\{2\}) = 1$.

A10

$K = \{1, \dots, k\}$ nat. Z. bis k.

$\Omega = K \times K = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq k\}$

Auf $\mathcal{A} = \mathrm{Pot}(\Omega)$,
sei P = diskrete Gleichverteilung auf Ω. (Laplace-Raum).

a) z.B. Werfen von zwei k-seitigen Würfeln

Skizze: Ω ist Quadrat.
A = vertikale Linie
B = horizontale
C = Quadrat oben links mit Seitenlänge 2.

b) $A = \{(1,j) : j \in K\}$

$B = \{(j,1) : j \in K\}$. $P(A) = ?$ $P(B) = ?$, A, B s.u?

$A = \{(1,1), \dots, (1,k)\}$
$B = \{(1,1), \dots, (k,1)\}$
$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k} = P(B)$.

$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{k^2} \neq \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} = P(A) \cdot P(B)$.

c) $C = \{(i,j) \in \Omega : i \leq 2\}$.
A, C s.u? für welche k?

$C = \{(1,1), \dots, (1,k), (2,1), \dots, (2,k)\}$

$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{k+k}{k^2} = \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k}$

$A \cap C = \{(1,j) : j \in K\} \cap \{(i,j) \in \Omega : i \leq 2\} =$

$= \{(1,j) : j \in K\} = A$

A, C s.u wenn

$P(A \cap C) \overset{!}{=} P(A) \cdot P(C) =$

$P(A \cap C) = P(A) = \frac{1}{k}$

$= \frac{1}{k} = \frac{2}{k^2} \Leftrightarrow k = 2$

$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} = \frac{2}{k^2}$