23SS Stocha PÜ 2

Aufgabe 4

Eine unverfälschte Münze wird dreimal hintereinander geworfen.

(a) Geben Sie für dieses Experiment eine geeignete Ergebnismenge Ω und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P an.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3): \omega_i \in \{K, Z\}, i \in \{1,2,3\}\}$$
$$|\Omega| = 2^3 = 8$$

(b) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω und berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

A : „Im ersten Wurf fällt Kopf und im letzten Wurf fällt Zahl"

B : „In den drei Würfen erscheint Kopf häufiger als Zahl"

$$A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3): \omega_1 = K, \omega_2 \in \{K, Z\}, \omega_3 = Z\}$$
$$A = \{(K, K, Z), (K, Z, Z)\}$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3): \omega_i \in \{K, Z\}, i \in \{1,2,3\}, \}$$
$$B = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, K), (Z, K, K)\}$$
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass das folgende Mengensystem eine σ-Algebra über $\Omega \neq \emptyset$ ist:

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \,|\, A \text{ höchstens abzählbar oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}$$

Hinweis: Sie können ohne eigenen Nachweis folgende Eigenschaften von abzählbaren Mengen verwenden:

(1) Jede Teilmenge einer höchstens abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.

(2) Vereinigungen einer abzählbaren Anzahl von höchstens abzählbaren Mengen sind höchstens abzählbar.

F ist eine σ-Algebra, wenn
(A1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}$
(A2) Aus $B \in \mathcal{A}$ folgt $B^c \in \mathcal{A}$
(A3) Aus $B_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N}$ folgt $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$

Zu (A1)
$\emptyset \in \mathcal{A}$, da höchstens abzählbar und $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{A}$

Zu (A2)
Angenommen $A \in \mathcal{A}$
Falls A höchstens Abzählbar $(A^c)^c = A \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Falls A^c höchstens Abzählbar $\Rightarrow B$

$$B^c = (A^c)^c = A$$

Zu (A3)

$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$

Falls: A_i ist höchstens abzählbar $\forall i \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist mit Hinweis (2) höchstens abzählbar

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Falls: $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ A_{i_0} nicht höchstens abzählbar

$\Rightarrow A_{i_0}^c$ ist höchstens abzählbar

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^{\;c} \subseteq A_{i_0}^c$$

$A_{i_0}^c$: höchstens abzählbar

$\Rightarrow$ Beweis 1

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c$ höchstens abzählbar

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Aufgabe 6

Gegeben seien eine Ergebnismenge Ω und eine σ - Algebra $\mathcal{F}$ sowie zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P_1, P_2 auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Weiter sei für $\lambda \in (0,1)$ die Abbildung $P_\lambda : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$P_\lambda(A) := \lambda P_1(A) + (1-\lambda)P_2(A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Zeigen Sie, dass P_λ für $\lambda \in (0,1)$ ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist.

Bedingungen für Wahrscheinlichkeitsmaß

1. $0 \leq P_\lambda(A) \leq 1$ für alle $A \in F$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Wenn $A_1, A_2, \ldots$ disjunkt, dann gilt

$$P_\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_\lambda(A_i)$$

Für 1:

$P_\lambda(A) \coloneqq \lambda P_1(A) + (1-\lambda)P_2(A)$

Es gilt $0 \leq P_\lambda(A)$:

$$0 \leq \underbrace{\underbrace{\lambda}_{>0} P_1(A)}_{\substack{\lambda = (0,1) \\ \geq 0}} + \underbrace{\underbrace{(1-\lambda)}_{>0} P_2(A)}_{\substack{\lambda = (0,1) \\ \geq 0}}$$

Also $0 \leq P_\lambda(A)$

Es gilt $P_\lambda(A) \leq 1$

$\lambda P_1(A) + (1-\lambda)P_2(A) \ \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$

Für 2:

$P_\lambda(\Omega) = \lambda P_1(\Omega) + (1-\lambda)P_2(\Omega)$

$= \lambda + (1-\lambda) = 1$

Für 3:

$$P_\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$
$$\lambda P_1(A) + (1-\lambda)P_2(A)$$
$$\Rightarrow \lambda P_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + (1-\lambda)P_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$
$$\Rightarrow \lambda \sum_{i=1}^{n} P_1(A) + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} P_2(A)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\big(\lambda P_1(A) + (1-\lambda)P_2(A)\big)$$
$$\Rightarrow \Sigma P_\lambda(A_i)$$

Aufgabe 7

Eine Softwarefirma beschäftigt drei Programmierer P_1, P_2 und P_3. Von P_1 wurden 230, von P_2 690 und von P_3 460 Programmierungen im vergangenen Jahr vorgenommen. Hierbei haben bei

P_1: 12% aller Programme mindestens zwei Programmierfehler,
40% aller Programme genau einen Programmierfehler,

P_2: 15% aller Programme genau einen Programmierfehler,
70% aller Programme keinen Programmierfehler,

P_3: 75% aller Programme keinen Programmierfehler,
10% aller Programme mindestens zwei Programmierfehler.

Die Softwarefirma wählt aus allen geschriebenen Programmen zufällig eines aus.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das ausgewählte Programm keine Programmierfehler?

Bezeichnung:
A_i: Das Programm ist von Programmierer P_i für $i \in \{1,2,3\}$
K: Das Programm hat keinen Programmierfehler
E: Das Programm hat genau einen Programmierfehler
Z: Das Programm hat min zwei Programmierfehler

$$P(A_1) = \frac{230}{1380} = \frac{1}{6}$$
$$P(A_2) = \frac{690}{1380} = \frac{1}{2}$$
$$P(A_3) = \frac{460}{1380} = \frac{1}{3}$$

$$P(E|A_1) = 0{,}4$$
$$P(Z|A_1) = 0{,}12$$

$$P(K|A_2) = 0{,}7$$
$$P(E|A_2) = 0{,}15$$

$$P(K|A_3) = 0{,}75$$
$$P(Z|A_3) = 0{,}1$$

$P(K|A_1)$ berechnen

$$P(K|A_1) = P((E \cup Z)^c|A_1) = 1 - P(E \cup Z|A_1)$$
$$= 1 - \big(P(E|A_1) + P(Z|A_1)\big) = 1 - (0{,}4 + 0{,}12) = 0{,}48$$

Dann erhält man mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(K) = \sum_{i=1}^{3} P(K|A_i) * P(A_i)$$

$$= 0{,}48 * \frac{1}{6} + 0{,}7 * \frac{1}{2} + 0{,}75 * \frac{1}{3} = 0{,}68$$

(b) Die Softwarefirma stellt fest, dass das Programm genau einen Programmierfehler aufweist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es vom Programmierer P_2?

$P(E|A_1) = 0{,}4$

$P(E|A_2) = 0{,}15$

$\mathrm{P}(E|A_3) = P((K \cup Z)^c|A_3) = 1 - P(K \cup Z|A_3)$

$= 1 - \left(P(K|A_3) + P(Z|A_3)\right) = 1 - (0{,}75 + 0{,}1) = 0{,}15$

$$P(A_2|E) = \frac{P(E|A_2) * P(A_2)}{P(E)} = \frac{P(E|A_2) * P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|A_i) * P(A_i)}$$

$$= \frac{0{,}15 * \frac{1}{2}}{0{,}4 * \frac{1}{6} + 0{,}15 * \frac{1}{2} + 0{,}15 * \frac{1}{3}} \approx 0{,}39$$