KGÜ 2

A4

3x geworfen

a) $\Omega = \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_i \in \{K, Z\}, i \in \{1,2,3\}\}$ (Kopf, Zahl)

Münze ist unverfälscht $\Rightarrow$ Laplace-Experiment

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{2^3} = \frac{|A|}{8}$ für jedes $A \subset \Omega$.

b) • A: "Im 1ten Wurf fällt K und im letzten fällt Z"

$A = \{(K, K, Z), (K, Z, Z)\}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

B = "In den 3 Würfen erscheint Kopf häufiger als Zahl"

$B = \{(K,K,K), (Z,K,K), (K,Z,K), (K,K,Z)\}$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

A5 ②

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A \overbrace{\text{höchstens abzählbar}}^{\text{h.a.}} \text{ oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}$$

($\mathcal{A} \in \mathrm{Pot}(\Omega)$)

z.z. $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über $\Omega \neq \emptyset$

1) Jede Teilmenge einer h.a. Menge ist h.a.
2) a. $\cup$ von h.a. Mengen sind h.a.

Definition

Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra über $\Omega \neq \emptyset$, falls
1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}$
~~2)~~
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3) $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

- $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge, also $\emptyset \in \mathcal{A}$ offensichtlich.
$|\emptyset| = 0 \Rightarrow \emptyset$ endlich. Damit $\emptyset$ h.a und $\emptyset \in \mathcal{A}$.
Außerdem $\Omega^c = \emptyset$ gilt $\Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$ ✓

- Sei nun $\underline{A \in \mathcal{A}}$, nach Def. ist A h.a oder A^c h.a.

1) A. - h.a.
Falls A h.a, dann folgt mit $(A^c)^c = A$, daß $A^c \in \mathcal{A}$
(weil das Komplement von A^c h.a. ist)

2) A^c h.a.
Falls A^c h.a, dann direkt $A^c \in \mathcal{A}$ nach Def. von $\mathcal{A}$.

- Seien $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N}$:

1) A_i h.a. $\forall i \in \mathbb{N}$ ②

Falls alle A_i h.a. sind, so ist

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ eine abzählbare $\bigcup$ höchstens abzählbarer

Mengen und nach Hinweis (2) auch selber h.a.

Damit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

2) Es gibt (mind.) ein $i_0 \in \mathbb{N}$, für das A_{i_0} nicht h.a ist.

Nach Annahme $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Dann muss $A_{i_0}^c$ h.a sein.

Mit DeMorgan: $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \subset A_{i_0}^c$, da

eine Schnittmenge immer eine Teilmenge aller

ursprünglichen Mengen ist.

Da $A_{i_0}^c$ aber h.a ist,

ist dann $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c$ eine Teilmenge einer

h.a. Menge und nach Hinweis (1) auch

selber h.a.

A6

4

Ω - Ergebnismenge

$\mathcal{F}$ - σ-Algebra

P_1, P_2 W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

Sei $\lambda \in (0,1)$ die Abbildung

$$P_\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R},$$

$$P_\lambda(A) = \lambda P_1(A) + (1-\lambda) P_2(A), \ A \in \mathcal{F}$$

z.z. P_λ für $\lambda \in (0,1)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist

$\Downarrow$

zz: Kolmogorov - Axiome: (W - Maß Definition).

1) $0 \le P_\lambda(A) \le 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkt, dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

P_1, P_2 - Axiome sind nach Voraussetzung erfüllt

Für P_λ:

① $0 \le P_\lambda(A) \le 1$

$$P_\lambda(A) \overset{def}{=} \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{P_1(A)}_{\ge 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{>0} \cdot \underbrace{P_2(A)}_{\ge 0} \ge 0$$

$$P_\lambda(A) = \lambda \underbrace{P_1(A)}_{\le 1} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{P_2(A)}_{\le 1} \le \lambda + 1 - \lambda \le 1$$

② $P_\lambda(\Omega) = \lambda \underbrace{P_1(\Omega)}_{=1} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{P_2(\Omega)}_{=1} = \lambda + 1 - \lambda = 1$

③ Seien $A_i, i \in \mathbb{N}$ jeweils paarweise disjunkt: $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall_{i,j \in \mathbb{N}, i \neq j}$

$$P_\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lambda P_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + (1-\lambda) P_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{\infty} P_2(A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda P_1(A_i) + (1-\lambda) P_2(A_i)\right) = \underline{\underline{\sum_{i=1}^{\infty} P_\lambda(A_i)}}$$

A7

P_1 - 230
P_2 - 690
P_3 - 460

P_1: 12% mind 2 Fehler
40% genau 1 -"-

P_2: 15% genau 1 -"-
70% keinen -"-

P_3: 75% keinen -"-
10% mind 2 -"-

Ereignisse:

$P_i \;\hat{=}$ "Programm ist vom Programmierer i", $i \in \{1,2,3\}$
$K \;\hat{=}$ "Programm hat keinen Fehler"
$E \;\hat{=}$ " -"- genau einen -"- "
$M \;\hat{=}$ " -"- mind. zwei -"- ".

- $\Omega = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ (disjunkte Zerlegung der 3 Ereignisse P_i)
- $K^c \overset{!}{=}$ "Progr. hat mind. 1 Fehler" =
  = "Progr. hat genau 1 oder mind 2 Fehler" =
  $= E \cup M$
- $E \cap M = \emptyset$ (disjunkt)

Nach Voraussetzung:

$P(E \mid P_1) = 0.4$
$P(M \mid P_1) = 0.12$

a)

$P(K \mid P_1) = 1 - P(K^c \mid P_1) = 1 - P(E \cup M \mid P_1) =$
$= 1 - (P(E \mid P_1) + P(M \mid P_1)) = 1 - (0.4 + 0.12) =$
$= 0.48$

$\boxed{P(K \mid P_1) = 1 - P(E \mid P_1) - P(M \mid P_1)}$

jetzt kann man damit auch $P(E \mid P_1)$ z.B. bestimmen

$$\left.\begin{array}{l} P(K|P_2)=0.7 \\ P(E|P_2)=0.15 \end{array}\right\} \Rightarrow P(M|P_2) = 1-0.7-0.15=0.15$$

$$\left.\begin{array}{l} P(K|P_3)=0.75 \\ P(M|P_3)=0.1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(E|P_3) = 1-0.75-0.1=0.15$$

$230+690+460=1380$ Programmierungen

$$P(P_1) = \frac{230}{1380} = \frac{1}{6}$$

$$P(P_2) = \frac{690}{1380} = \frac{1}{2}$$

$$P(P_3) = \frac{460}{1380} = \frac{1}{3}$$

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

a) $$P(K) = \sum_{i=1}^{3} P(K|P_i)\cdot P(P_i) =$$

$$= 0.48\cdot\frac{1}{6} + 0.7\cdot\frac{1}{2} + 0.75\cdot\frac{1}{3} = 0.68$$

b) $\exists$ genau 1 Fehler; mit welcher P( ) ist es von P_2?

$$P(P_2|E) = \frac{P(E|P_2)\cdot P(P_2)}{P(E)} =$$

$$= P(E|P_2)\cdot\frac{P(P_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|P_i)\cdot P(P_i)} =$$

$$= 0.15\cdot\frac{\frac{1}{2}}{0.4\cdot\frac{1}{6}+0.15\cdot\frac{1}{2}+0.15\cdot\frac{1}{3}} = 0.39$$