Aufgabe 11

Weisen Sie nach, dass die nachstehenden Funktionen Zähldichten bzw. Dichtefunktionen auf dem jeweils angegebenen Träger darstellen:

p ist eine Zähldichte mit Ω, falls

a. $p(\omega) \geq 0; \quad \forall \omega \in \Omega$

b. $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

$f: R \to R$ ist Dichtfunktion siner stetigen Zufallsvariable, falls gilt:

i) $P(x) \geq 0 \; \forall x \in R$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Exponentialreihe:

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}$$

Binomische Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Geometrische Summenformel:

$$\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1-p^{n-1}}{1-p}$$

(i) $p_k = p(1-p)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, für ein $p \in (0,1)$ (Geometrische Verteilung $Geo(p)$),

Zähldichte

a. Für alle $p \in (0{,}1)$ ist $p(1-p)^k > 0$, da $(1-p)$ für alle $p \in (0{,}1)$ nie negativ wird
$(1-p) \in (0{,}1)$ und $p \in (0{,}1)$, also $p(1-p)^k > 0$

b. $\sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k$$

Gemetrischen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

$$p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p * \frac{1}{p} = 1$$

Also die Bedingungen für Zähldichte ist erfüllt.

Die Funktion ist Zähldicht.

(ii) $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$, für ein $\lambda > 0$ (Poisson–Verteilung $Poi(\lambda)$),

Zähldichte

a. Da $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda > 0$, Für alle k, λ sind $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ nie negativ

Da $\lambda^k \in (0, \infty), k! \in (1, \infty), e^{-\lambda} \in (0,1)$ positiv sind.

b. $\sum_{k=0}^{\infty} p(X = k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Exponentialreihe:

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

$$e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} * e^{\lambda} = e^0 = 1$$

Die Funktion ist Zähldicht.

(iii) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, für ein $\lambda > 0$ (Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$),

$f: R \to R$ ist Dichtfunktion siner stetigen Zufallsvariable, falls gilt:

i) Für alle $x \geq 0, \lambda > 0$ sind $\lambda e^{-\lambda x}$ nie negativ

Da $e^{-\lambda x} \in (0,1]$ und somit $\lambda * e^{-\lambda x}$ positiv

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}$$

$$= -e^{-\lambda \infty} - (-e^{-\lambda * 0})$$
$$= 0 + 1 = 1$$

Die Funktion ist Dichtfunktion

(iv) $f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $x \geq 1$, für ein $\alpha > 0$ (Pareto-Verteilung $Par(\alpha)$).

$f: R \to R$ ist Dichtfunktion siner stetigen Zufallsvariable, falls gilt:

i) Für alle $x \geq 1$ und $a > 0$ sind $\frac{a}{x^{a+1}}$ nie negativ

$Da\ a \in (0, \infty)$ und $x^{a+1} \in [1, \infty)$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Für ii)

$$\int_1^{\infty} \frac{a}{x^{a+1}}\, dx = \left[-\frac{1}{x^a}\right]_1^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{\infty^a} - \left(-\frac{1}{1^a}\right)$$
$$= 0 - (-1) = 1$$

Die Funktion ist Dichtfunktion.

Definition

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $A \subset \Omega$. Dann heißt die Funktion

$$\mathbb{1}_A : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Indikatorfunktion von A.

Es gilt also $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ für $\omega \in \Omega$, wenn das Ereignis A eingetreten ist, bzw. $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$, wenn das Ereignis A nicht eingetreten ist. Beachten Sie außerdem, dass in dieser Definition Ω nicht notwendigerweise abzählbar sein muss.

Aufgabe 12

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (d.h. $\Omega \neq \emptyset$ ist eine Ergebnismenge, $\mathcal{F}$ ist eine zugehörige σ-Algebra über Ω und P ist eine zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω).

(a) Sei $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$ und $B \in \mathcal{G}$. Zeigen Sie, dass für jedes Ereignis $A \in \mathcal{F}$ durch die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben ist.

Hinweis: Sie müssen hierfür die Messbarkeit der Indikatorfunktion nachweisen, d.h. Sie müssen zeigen, dass für $B \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_A(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

gilt.

Definition des Indikatorfunktion folgt:

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Für $B \in g$ haben wir dann

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \colon \mathbb{1}_A(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$
$$= \left\{ \begin{matrix} \Omega, 0 \in B, 1 \in B \\ \emptyset, 0 \notin B, 1 \notin B \\ \mathrm{A}, 0 \notin B, 1 \in B \\ \mathrm{A}^c, 0 \in B, 1 \notin B \end{matrix} \right\} \in \mathcal{F}$$

Da $\mathcal{F}$ nach Vorraussetzung eine σ-Algebra wie Ω und $A \in \mathcal{F}$

(b) Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ Ereignisse für $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren nun die Indikatorsumme

$$X(\omega) := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \mathbb{1}_{A_1}(\omega) + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Was wird durch die Indikatorsumme X ausgedrückt?

Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{A_i}$ gilt an, als das i-te Ereignis A_i eingetreten ist oder nicht.
Die Indikatorsumme X gilt: die Anzahl des eintreten des Ereignisse unter $A_1, \ldots, A_n$ an

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Was wird durch die Ereignisse

$$\{X \leq k\} \qquad \text{und} \qquad \{X \geq k\}$$

ausgedrückt?

Mit $\{X \leq k\}$ bzw $\{X \geq k\}$ wird das Ereignis beschrieben, dass höchstens bzw mindestens k der Ereignisse A_i eintreten

(d) Ein Versuch mit den möglichen Ergebnissen *Treffer* und *Niete* werde $2n$ - mal durchgeführt. Die ersten n Versuche bilden die erste Versuchsreihe, die zweiten n Versuche bilden die zweite Versuchsreihe. Beschreiben Sie folgende Ereignisse mit Hilfe geeigneter Zufallsvariablen:

Wir definieren die Zufallsvariablen

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}) \mid \omega_i \in \{0,1\}, i \in \{1, \dots, 2n\}\}$$
$$A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = 1\}$$

$$X: \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \text{ und } Y: \sum_{i=n+1}^{2n} \mathbb{1}_{A_i}$$

Mit dieser Notation können wir dann die Ereignisse schreiben, als

(i) In der ersten Versuchsreihe tritt mindestens ein Treffer auf.

$\{X \geq 1\}$

(ii) Bei beiden Versuchsreihen treten gleich viele Treffer auf.

$\{X = Y\}$

(iii) Die zweite Versuchsreihe liefert mehr Treffer als die erste.

$\{Y > X\}$

(iv) In jeder Versuchsreihe gibt es mindestens eine Niete.

$\{X < n\} \cap \{Y < n\}$

Aufgabe 13

Gegeben seien die Funktionen f_c $(c \in \mathbb{N})$ mit

$$f_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x < 0, \\ \frac{1}{9}(x-3)^c, & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{für} \quad x > 3. \end{cases}$$

(a) Für welche Werte $c \in \mathbb{N}$ ist f_c Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung?

$f: R \to R$ ist Dichtfunktion siner stetigen Zufallsvariable, falls gilt:

i) $f(x \geq 0)\ \forall x \in R$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Zu i)

Für $0 \leq x \leq 3$ ist

$$f(x) = \frac{1}{9}(x-3)^c \geq 0 \quad \Leftrightarrow c \text{ ist gerade}$$

Und für $x \notin [0,3]$ ist $f(x) = 0 \geq 0$

ZU ii)

$$\int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^3 \frac{1}{9}(x-3)^c\, dx = \frac{1}{9}\int_0^3 (x-3)^c$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^3 (x-3)^c\, dx = \frac{1}{9}\left[\frac{(x-3)^{c+1}}{c+1}\right]_0^3$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{0^{c+1}}{c+1} - \left(\frac{(-3)^{c+1}}{c+1}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{(-3)^{c+1}}{c+1}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{(-3)^{c+1}}{c+1} = -9$$
$$\Rightarrow (-3)^{c+1} = -9c - 9$$
$$\Rightarrow (-3)(-3)^c = -9c - 9$$
$$\Rightarrow (-3)^c = 3c + 3$$

$$\Rightarrow c = 2$$

D.h. für $c = 2$ ist f eine Dichtefunktion

(b) Ermitteln Sie (für die in (a) bestimmten Werte c) die zur Dichtefunktion f_c gehörende Verteilungsfunktion.

Mit $c = 2$ folgt

für $t < 0$:

$$\mathrm{F_x}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0$$

für $0 \leq t < 3$:

$$F_x(t) = \int_0^t \frac{1}{9}(x-3)^2\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^t$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(t-3)^3}{3} - \left(-\frac{27}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(t-3)^3}{3} - (-9)\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(t-3)^3}{3} + 9\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(t-3)^3}{3}\right) + 1$$

für $3 \leq t$:

$$F_x(t) = \int_0^t \frac{1}{9}(x-3)^2\,dx = \frac{1}{9}\left(\frac{(3-3)^3}{3}\right) + 1 = \frac{1}{9}(0) + 1 = 1$$

(c) Berechnen Sie $P(X \in (1,2])$, wobei P die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet.

$$P(X \in (1,2]) = P(1 < X \leq 2) = F_x(2) - F_x(1)$$
$$= \int_{-\infty}^{2} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(2-3)^3}{3}\right) + 1 - \left(\frac{1}{9}\left(\frac{(1-3)^3}{3}\right) + 1\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(2-3)^3}{3}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{(1-3)^3}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{-1}{3}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{-8}{3}\right)$$
$$= \frac{-1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{7}{27}$$