A11 KGÜ 3 ①

i) $p_k = p(1-p)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in (0,1)$ (Geo(p).)

$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Zähldichte auf einem Träger Ω, falls:

a) $p(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$

b) $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Dichtefkt, falls:

a) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

$p_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$, da $k \in (0,1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

ii) $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$, für ein $\lambda > 0$ (Poi(λ)).

$p_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$, da $\lambda > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{exp. Reihe} = e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

iii) $f(x) = \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{>0}$, $x \geq 0$, für ein $\lambda > 0$ (Exp(λ)).

$f(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0$ da $\lambda > 0$.

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}] \Big|_{x=0}^{\infty} = 1$$

$$(e^{-\lambda x})' = -\lambda e^{-\lambda x}$$

$$(-e^{-\lambda x})' = -(-\lambda) e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x}$$

iv) $f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $x \geq 1$, für ein $\alpha > 0$ (Par(α)).

$f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$ da $\alpha > 0$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \alpha x^{-\alpha-1} dx = [-x^{-\alpha}] \Big|_{x=1}^{\infty} = 1$$

$(x^M)' = M x^{M-1}$;

A12 ②

$\Omega \neq 0$, $A \subset \Omega$

Ereignis ist in A

$\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \to \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Ereignis nicht in A

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - W-keitsraum ($\Omega \neq 0$, $\mathcal{F}$ - σ-Algebra über Ω, P - W-keitsverteilung)

a) Sei $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$
$B \in \mathcal{G}$.

z.z. für jedes Ereignis $A \in \mathcal{F}$ durch die $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben ist.

Messbarkeit der $\mathbb{1}_A$, also z.z.:

$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_A(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in A^C \end{cases}$

für $B \in \mathcal{G}$:

$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_A \in B\} =$

$= \left.\begin{cases} \Omega & , 0 \in B, 1 \in B \\ \emptyset & , 0 \notin B, 1 \notin B \\ A & , 0 \notin B, 1 \in B \\ A^C & , 0 \in B, 1 \notin B \end{cases}\right\} \in \mathcal{F}$ nach Voraussetzung eine σ-Alg. über Ω und $A \in \mathcal{F}$.

b) $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$, $m \in \mathbb{N}$

$X(\omega) := \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \mathbb{1}_{A_1}(\omega) + \dots \mathbb{1}_{A_m}(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

- Indikatorsumme.

Was wird durch $X(\omega)$ ausgedrückt?

Die $1\!\!1_{A_i}$ gibt an, ob das i-te Ereignis A_i eingetreten ist ③
oder nicht.

Die Indikatorsumme X gibt die Anzahl der eintretenden Ereignisse unter $A_1, \dots, A_n$ an.

c) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$.

$$\left.\begin{array}{l}\{X \le k\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le k\} \text{ höchstens} \\ \{X \ge k\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \ge k\} \text{ mindestens}\end{array}\right\} k \text{ der Ereignisse } A_i \text{ eintreten}$$

d) Treffer (= 1)
Niete (= 0)
2mal
$1, \dots, n$ 1. } Versuchsreihe
$n+1, \dots, 2n$ 2.

~~i) Im 1. tritt mind. ein Treffer~~

Treffer = 1, Niete = 0

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{2n}) : \omega_i \in \{0,1\},\ i = 1, \dots, 2n\} = \{0,1\}^{2n}$

A_j = „Treffer im j-ten Versuch" $= \{\omega \in \Omega : \omega_j = 1\}$

$j = 1, \dots, 2n$: $\underbrace{X = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{A_i}}_{\text{die Anzahl der Treffer in 1.}}$, $\underbrace{Y = \sum_{i=n+1}^{2n} 1\!\!1_{A_i}}_{\text{-"- in 2.}}$

i) $\{X \ge 1\}$

ii) $\{X = Y\}$

iii) $\{Y > X\}$

iv) $\{X < n\} \cap \{Y < n\}$.

A13

$f_c (c\in\mathbb{N})$: $f_c(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{1}{9}(x-3)^c & , 0\le x\le 3 \\ 0 & , x>3 \end{cases}$

a) $c\in\mathbb{N} = ?$ sodaß f_c - Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeitsvert.

$f_c(x)$ Dichte, falls:

① $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\,dx = 1$

② $f_c(x)\ge 0,\ x\in\mathbb{R}$

→ ① $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\,dx = \int_0^3 \frac{1}{9}(x-3)^c\,dx = \frac{1}{9}\int_0^3 (x-3)^c\,dx =$

$= \left[\frac{1}{9}\,\frac{1}{c+1}(x-3)^{c+1}\right]_0^3 = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{c+1}(-3)^{c+1} \overset{!}{=} 1$

also $\frac{1}{c+1}(-3)^{c+1} = -9 \iff \boxed{c=2}$

→ ② $f_2(x) = \underbrace{\frac{1}{9}}_{>0}\underbrace{(x-3)^2}_{\ge 0} \ge 0,\ x\in\mathbb{R}$

$f_c(x)$ ist mit $c=2$ eine ....

b) die gehörende Verteilungsfunktion? für $f_2(x)$.

$F_2(x) = \int_0^x \frac{1}{9}(z-3)^2\,dz =$

$= \left[\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}(z-3)^3\right]_0^x = \frac{1}{27}(x-3)^3+1,\ 0\le x\le 3$

d. h.: $F_2(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{1}{27}(x-3)^3+1 & , 0\le x\le 3 \\ 1 & , x>3 \end{cases}$

c) $P(X \in (1,2]) =$

$= P(X \leq 2) - P(X \leq 1) =$

$= F_2(2) - F_2(1) =$

$= \frac{1}{27}(2-3)^3 + 1 - \left(\frac{1}{27}(1-3)^3 + 1\right) =$

$= -\frac{1}{27} + 1 + \frac{8}{27} - 1 =$

$= \frac{7}{27}$

$F_m(x) : (-\infty, x]$

$1 - F_m(x) : (x, \infty)$

$F_m(y) - F_m(x) : (x, y]$

$[x, y] : F_m(y) - F_m(x) + f_x$

$(x, y) : F_m(y) - f(y) - F_m(x)$