23SS Stocha PÜ 4

Aufgabe 14

Sei X eine stetige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(5-4x), & x \in (0,1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie mit dem Dichtetransformationssatz die Dichtefunktion der Zufallsvariablen

$$Y = aX$$

für $a > 0$ sowie die Verteilungsfunktion von Y.

1. Funktion definieren

   $g: (0,1) \to (0,a), x \to g(x) = ax, \qquad a > 0$

2. Zeige, dass g umkehrbar ist, d.h. g ist bijektiv

   g surjektiv:

   Für beliebiges $y \in (0,\infty)$ existiert min ein $x \in (0,1)$, sodass $y = aX$ ist.
   Nämlich $x = \frac{y}{a}$

   g injektiv:

   Seien $x_1, x_2 \in (0,1)$ mit $x_1 \neq x_2$.
   Dann gilt $g(x_1) = ax_1 \neq ax_2 = g(x_2)$

   $\Rightarrow g$ ist bijektiv
   $\Rightarrow g$ ist umkehrbar und die Umkehrfunktion ist gegeben

   $g^{-1}: (0,a) \to (0,1)$

   $$y \to g^{-1}(y) = \frac{y}{a} = y * \frac{1}{a}$$

g und g^{-1} sind stetig differenzierbar und für die Ableitung von g^{-1} gilt:

$$(g^{-1})'(y) = \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{a}$$

Dichtetransformationssatz anwenden:

Für die Zufallsvariable $y = g(x)$

$$f_y(y) = f_x\left(g^{-1}(y)\right) * \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Hier haben wir

$$f_y(y) = \frac{1}{3a}\left(5 - 4\frac{y}{a}\right) * \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

$$F_y(z) = \int_{-\infty}^{z} f_y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{3a}\left(5 - 4\frac{y}{a}\right) * \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\,dy$$

1. Fall: $z \leq 0$:

   $$F_y(z) = \int_{-\infty}^{z} 0\,dy = 0$$

2. Fall: $z \in (0,a)$:

   $$F_y(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{3a}\left(5 - 4\frac{y}{a}\right) dy = \frac{1}{3a} * \left[5y - \frac{2}{a}y^2\right]_0^z = \frac{1}{3a}\left(5z - \frac{2}{a}z^2\right) = \frac{5z}{3a} - \frac{2z^2}{3a^2}$$

3. Fall: $z \geq a$:

$$F_y(z) = \int_0^a \frac{1}{3a}\left(5 - 4\frac{y}{a}\right) dy = 1$$

$$F_y(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{5z}{3a} - \frac{2z^2}{3a^2} & 0 < z < a \\ 1 & z \geq a \end{cases}$$

Aufgabe 15

Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen, wobei X die Werte -1, 0 und 1 und Y die Werte 1, 2 und 3 annimmt. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$ für $i \in \{-1, 0, 1\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, sind in der folgenden Tabelle angegeben:

$p_{ij} = P(X = i, Y = j)$		j			
		1	2	3	
i	-1			0	1/4
	0	1/5	1/5		
	1	1/10	1/10		1/4
			1/2		

(a) Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle.

$p_{ij} = P(X = i, Y = j)$		j			
		1	2	3	
i	-1	1/20	1/5	0	1/4
	0	1/5	1/5	1/10	1/2
	1	1/10	1/10	1/20	1/4
		7/20	1/2	3/20	1

(b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Nein, da

$$P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = P(X = 0) * P(Y = 2)$$

(c) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$.

$$E(X) = \sum_{i \in \{-1,0,1\}} i * P(X = i) = -1 * P(X = -1) + 0 * P(X = 0) + 1 * P(X = 1)$$
$$= -1 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{1}{4} = 0$$

$$E(X^2) = \sum_{i \in \{-1,0,1\}} i^2 * P(X = i)$$
$$= (-1)^2 * P(X = -1) + 0 * P(X = 0) + 1^2 * P(X = 1)$$

$$= 1 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$
$$Var(X) = \frac{1}{2} - 0 = 0{,}5$$

$$E(Y) = \sum_{j \in \{1,2,3\}} j * P(Y = j) = 1 * P(Y = 1) + 2 * P(Y = 2) + 3 * P(Y = 3)$$
$$= 1 * \frac{7}{20} + 2 * \frac{1}{2} + 3 * \frac{3}{20} = 1{,}8$$

$$E(Y^2) = \sum_{j \in \{1,2,3\}} j^2 * P(Y = j)$$
$$= 1^2 * P(Y = 1) + 2^2 * P(Y = 2) + 3^2 * P(Y = 3)$$
$$= \frac{7}{20} + 2^2 * \frac{1}{2} + 9 * \frac{3}{20} = \frac{37}{10} = 3{,}7$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2$$
$$= 3{,}7 - 1{,}8^2 = 0{,}46$$

Aufgabe 16

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable (d.h. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$) mit Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen e^X.

$$F_{\varphi}x(y) = P(e^x \leq y) = \int_0^y \tilde{\varphi}(x)\, dx$$

$= P(X \leq \log(y))$ Da $e^x = y \Rightarrow x = \log(y)$ gilt?

$$= \int_{-\infty}^{\log(y)} \varphi(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\log(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

Substituiere

$$u = e^z$$

Damit ist $z = \log(u)$ und $\frac{du}{dz} = e^z = u$.

Da $\lim_{b \to -\infty} e^b = 0$

$$= \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-\frac{log^2(u)}{2}}\, du$$

$$f_e x(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{log^2(y)}{2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(e^X)$.

$$f_e x(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{log^2(y)}{2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$
$$f_e x(e^x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^x} e^{-\frac{log^2(e^x)}{2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(e^x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{1}{e^x} * e^{-\frac{1}{2}log^2(e^x)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(e^x)$$

$$E(e^x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x * \frac{1}{e^x} * e^{-\frac{1}{2}log^2(e^x)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(e^x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}log^2(e^x)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(e^x)$$

$$\begin{aligned} E(e^x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u * f_e x(u)\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u * \frac{1}{u} * e^{-\frac{1}{2}\log^2(u)}\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}+z}\, dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-1)^2}\, dz \\ &= e^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathcal{N}(1,1) = 1 \end{aligned}$$

Hinweis: (a) Betrachten Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen e^X und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung.
(b) Die Dichtefunktion einer Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 \in (0, \infty)$ (kurz: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) ist gegeben durch

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 17

Gegeben seien paarweise stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X, Y und Z auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit

$$E(X) = 2, \quad E(X^2) = 5, \quad E(Y) = 1, \quad E(Y^2) = 3, \quad E(Z) = 11.$$

Weiter sei $A := 5X - 7Y$. Berechnen Sie

Formel:
Seien X,Y die Zufallsvariablen, $a \in \mathbb{R}$

1) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
2) $E(aX) = a * E(X)$
3) $E(a) = a$
4) $E(X * Y) = E(X) * E(Y)$, falls X und Y stochastisch unabhängig.
5) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$, falls X und Y stochastisch unabhängig
6) $Var(aX) = a^2 * Var(X)$
7) $Var(X + a) = Var(X)$
8) Verschiebungssatz: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

(a) $E(A)$

$$\begin{aligned} E(A) &= E(5X - 7Y) = E(5X) - E(7Y) = 5E(X) - 7E(Y) \\ &= 5 * 2 - 7 * 1 = 3 \end{aligned}$$

(b) $\text{Var}(A)$

$$\begin{aligned} Var(A) &= Var(5X - 7Y) = Var(5X) - Var(7Y) \\ &= 25Var(X) - 49Var(Y) \\ &= 25\left(E(X^2) - (E(X))^2\right) - 49\left(E(Y^2) - (E(Y))^2\right) \\ &= 25(5 - 4) - 49(3 - 1) \\ &= 25 - 49(2) \\ &= 123 \end{aligned}$$

(c) $E(A \cdot X)$

$$
\begin{aligned}
E(A * X) &= E\big((5X - 7Y) * X\big) = E\big(5X^2 - 7YX\big) \\
&= E\big(5X^2\big) - E(7YX) = 5E\big(X^2\big) - 7E(X)E(Y) \\
&= 5 * 5 - 7 * 2 * 1 = 25 - 14 = 11
\end{aligned}
$$

(d) $E(A \cdot Z)$

$$E(A * Z) = E(A) * E(Z) = 3 * 11 = 33$$