Aufgabe 18

(a) Auf einen Server werden täglich mehrere Hackerangriffe verübt. Die Anzahl der an einem Tag registrierten Angriffe kann durch eine Poisson–verteilte Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda = 6$ beschrieben werden, d.h. die Zähldichte ist gegeben durch

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{6^k}{k!}e^{-6}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für

(i) genau fünf Angriffe an einem Tag,

$$P(X = 5) = \frac{6^5}{5!}e^{-6} \approx 0{,}1606 = 16{,}06\%$$

(ii) mindestens vier Angriffe an einem Tag.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(X = K)$$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-6}6^k}{k!}$$

$$1 - \sum_{k=0}^{3} P(X = k) = 1 - \frac{e^{-6}}{1} + \frac{e^{-6}6}{1} + \frac{e^{-6}36}{2} + \frac{e^{-6}216}{6}$$
$$= 1 - \frac{e^{-6}}{1} + \frac{e^{-6}6}{1} + \frac{e^{-6}18}{1} + \frac{e^{-6}36}{1}$$
$$= 1 - e^{-6}(1 + 6 + 18 + 36) = 0{,}849$$

(b) Die Lebensdauer (in Stunden) von bestimmten Bauteilen werde durch eine mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable X beschrieben, d.h. die Dichtefunktion von X ist gegeben durch

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,, \qquad \lambda > 0\,.$$

Berechnen Sie für $\lambda = \frac{1}{800}$ die Wahrscheinlichkeit für

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(i) höchstens 300 Stunden Lebensdauer eines Bauteils,

$$P(X \leq 300) = F^X(300) = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$= 1 - e^{-\frac{300}{800}} = 1 - e^{-\frac{3}{8}} \approx 0{,}313$$

(ii) mehr als 120 Stunden Lebensdauer eines Bauteils,

$$P(X > 120) = 1 - P(X \leq 120) = 1 - F^X(120) = e^{-\frac{120}{800}} = e^{-\frac{3}{20}} \approx 0{,}861$$

(iii) zwischen 240 und 360 Stunden Lebensdauer eines Bauteils.

$$P(240 \leq X \leq 360) = P(240 < X \leq 360) = F^X(360) - F^X(240)$$
$$= 1 - e^{-\frac{360}{800}} - \left(1 - e^{-\frac{240}{800}}\right) = -e^{-\frac{9}{20}} + e^{-\frac{3}{10}} \approx 0{,}103$$

(iv) Für welchen Wert des Parameters λ ergibt sich eine Lebensdauerverteilung, bei der mit Wahrscheinlichkeit 0.99 die Lebensdauer eines derartigen Bauteils mindestens 100 Stunden beträgt?

Gesucht:

$\lambda > 0$ mit $P(X \geq 100) = 0{,}99$

$$P(X \geq 100) = P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100)$$
$$= 1 - F^X(100) = e^{-100\lambda} = 0{,}99$$
$$\Rightarrow -100\lambda = \ln(0{,}99)$$
$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\ln(0{,}99)}{100} \approx 1{,}005 * 10^{-4}$$

Aufgabe 19

Ein Online - Versandhändler will mit einer Gutscheinaktion Neukunden gewinnen. Er plant, $n \in \mathbb{N}$ Gutscheine für Überraschungspakete zu verteilen. Je eingelöstem Gutschein entstehen dem Händler 20€ zusätzliche Kosten. Er geht davon aus, dass sich die Verwendung der Gutscheine durch stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim \text{Bin}(1, 0.8)$ für $i = 1, \ldots, n$ modellieren lässt, wobei er die Zufallsvariablen wie folgt interpretiert:

$X_i = 1$ entspricht dem Ereignis „der i-te Gutschein wird eingelöst“ und

$X_i = 0$ entspricht dem Ereignis „der i-te Gutschein wird nicht eingelöst“.

Bezeichne $S_n = \sum_{i=1}^{n}$ die Summe dieser Zufallsvariablen.

(a) (i) Geben Sie die Verteilung von S_n an, und berechnen Sie die erwarteten zusätzlichen Gesamtkosten $E(20 \cdot S_n)$.

$E(20 * S_n) = 20 * E(S_n) = 20 * n * 0{,}8 = 16 * n$

(ii) Der Versandhändler will möglichst viele Gutscheine verteilen, aber gleichzeitig die erwarteten zusätzlichen Gesamtkosten durch Gutscheineinlösungen nicht über 3200€ steigen lassen. Wie sollte er $n \in \mathbb{N}$ wählen?

$E(20 * S_n) \leq 3200$

$20 * E(S_n) \leq 3200$

$16 * n \leq 3200$

$n = 200$

(b) Der Händler entschließt sich $n = 100$ Gutscheine zu verteilen.

(i) Berechnen Sie die Varianz von S_{100}.

$Var(S_{100}) = n * p * (1-p)$ mit $n = 100, p = 0{,}8$

Also ist $Var(S_{100}) = 100 * 0{,}8 * 0{,}2 = 16$

(ii) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass alle 100 verteilten Gutscheine eingelöst werden.

$P(S_{100}) = \binom{100}{100} 0{,}8^{100} * 0{,}2^0 = 0{,}8^{100}$

Aufgabe 20

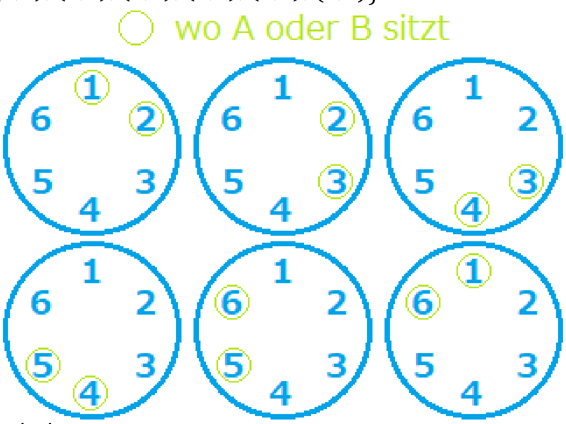
Sechs Personen A, B, C, D, E und F nehmen rein zufällig ihre Plätze an einem runden Tisch mit sechs Stühlen ein. Geben Sie zu dieser Situation eine geeignete Ergebnismenge an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die Person A und B nebeneinander sitzen.

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) | \, \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 6\}, \omega_1 < \omega_2\}$

ω_1: Platznummer von A
ω_2: Platznummer von B

Ohne Wiederholung, Ohne Reihenfolge (Link)
6 Plätze im Tisch
2 mal Plätze wählen (Für A und B)
$|\Omega| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! * 2!} = 15$

$N = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (1,6)\}$



$P(N) = \frac{|N|}{|\Omega|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Aufgabe 21

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 e^{-\frac{y}{2}}}{x^{4y+1}}, & x > 1,\, y > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Randdichte f_Y von Y gegeben ist durch

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} y e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$f^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{X,Y}(x, y)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{y^2 e^{-\frac{y}{2}}}{x^{4y+1}} dx \quad ; \; -\infty \; nach \; 1 \; gesetzt, da \; x > 1$$

$$= y^2 e^{-\frac{y}{2}} \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{4y+1}} dx = y^2 e^{-\frac{y}{2}} \int_{1}^{\infty} x^{-4y-1} dx$$

$$= y^2 e^{-\frac{y}{2}} \left[-\frac{1}{4y} * x^{-4y} \right]_{x=1}^{x=\infty}$$

$$= y^2 e^{-\frac{y}{2}} * \left[0 - \left(-\frac{1}{4y} \right) \right] = y^2 e^{-\frac{y}{2}} * \frac{1}{4y}$$

$$= \frac{1}{4} y e^{-\frac{1}{2}y}$$

Für $y \leq 0$ gilt:

$$f^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{X,Y}(x, y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dx = 0 \quad ; wegen \; Definition \; in \; f^{X,Y}$$

Dadurch

$$f^Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} y e^{-\frac{1}{2}y} & y > 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

(b) Sei $y > 0$ gegeben. Bestimmen Sie die bedingte Dichte $f_{X|Y=y}$ von X gegeben $Y = y$.

Für $y > 0$ ist nach (a) auch $f^Y(y) > 0$.
Daher gilt für $y > 0$:

$$f^{X|Y=y}(x) = \frac{f^{X,Y}(x,y)}{f^Y(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Damit ist die bedingte Dichte für $x > 1$ gegeben durch

$$f^{X|Y=y}(x) = \frac{\frac{y^2 e^{-\frac{y}{2}}}{x^{4y+1}}}{\frac{1}{4} y e^{-\frac{1}{2}y}} = \frac{4y}{x^{4y+1}}$$

Und für $x \leq 1$

$$f^{X|Y=y}(x) = \frac{0}{f^Y(y)} = 0 \quad ; 0\ nach\ Def\ von\ f^{X,Y}$$

(c) Berechnen Sie für $y > \frac{1}{4}$ den bedingten Erwartungswert $E(X|Y = y)$ von X gegeben $Y = y$.

Für $y > \frac{1}{4}$ ist

$$\mathrm{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x * f^{X|Y=y}(x)\, dx = \int_{1}^{\infty} x * \frac{4y}{x^{4y+1}}\, dx = 4y \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{4y}}\, dx$$

$$= 4y \int_{1}^{\infty} x^{-4y}\, dx$$

$$= 4y \left[\frac{x^{-4y+1}}{-4y+1}\right]_{x=1}^{x=\infty} = 4y \left[0 - \left(\frac{1}{-4y+1}\right)\right] = 4y \left[\frac{1}{4y-1}\right] = \frac{4y}{4y-1}$$