KGÜ 5

A18

a) Poisson X mit $\lambda = 6$

Zähldichte $p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{6^k}{k!} e^{-6}$, $k \in \mathbb{N}_0$

i) 5 Angriffe an einem Tag

$$P(X=5) = p_5 = \frac{6^5}{5!} e^{-6} \approx 0.161$$

$\int \lfloor \qquad \rfloor \; \mathbb{1}_c(x)$

ii) mind. 4

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X<4) =$$
$$= 1 - P(X \leq 3) =$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{3} P(X=k) = 1 - e^{-6} \sum_{k=0}^{3} \frac{6^k}{k!} = 1 - e^{-6}(1+6+18+36) =$$
$$\approx 0.849$$

$z = \log(u)$

$u = e^z$

$du = e^z\, dz$

$dz = \frac{du}{e^z}$

b) Lebensdauer (h) exponentialverteilte X, $\lambda > 0$

Dichtefunktion: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $\lambda > 0$

$$\lambda = \frac{1}{800}$$

i) max. 300 Stunden

Verteilungsfunktion von X:

Für $\underline{t>0}$: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, dx =$

$$= \int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=t} = -e^{-\lambda t} - (-1)$$

$\underline{t \leq 0}$: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{t} 0\, dx = 0$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

i) $P(X \leq 300) = F_X(300) = 1 - e^{-3/8} \approx 0.313$

ii) $P(X > 120) = 1 - P(X \leq 120) = 1 - F_X(120) = e^{-3/20} \approx 0.861$

zwischen 240 - 360

iii) F_X stetig:

$$P(240 < X < 360) =$$
$$= P(240 \leq X \leq 360) =$$
$$= P(240 < X \leq 360) =$$
$$= F_X(360) - F_X(240) = 1 - e^{-9/20} - (1 - e^{-3/10}) \approx 0.103$$

iv) $\lambda = ?$ $P = 0.99$, mind. 100 Stunden

$\lambda > 0$

$P(X \geq 100) = 0.99$

$$P(X \geq 100) = 1 - P(X \leq 100) =$$
$$= 1 - F_X(100) = e^{-\lambda \cdot 100} \stackrel{!}{=} 0.99$$
$$\Leftrightarrow -100\lambda = \ln(0.99)$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0.99)}{100} \approx 0,0001005 = 1,005 \cdot 10^{-4}$$

A19

$n \in \mathbb{N}$ Gutscheine

20€ zusätzliche Kosten

s.u., id. verteilte $X_1, \dots, X_n$ mit $X_i \sim Bin(1, 0.8)$, $i=1,\dots,n$

$X_i = 1$: „i-te Gutschein wird eingelöst"
$X_i = 0$: „ -11- nicht -11- "

$S_n = \sum_{i=1}^{n}$ die Summe dieser Zufallsvariablen

a) i) Verteilung S_n; $E(20 \cdot S_n)$.

X_i, $i=1,\dots,n$ binomialverteilt $\left.\begin{array}{l} n_i = 1 \\ p = 0.8 \\ \text{s.u.} \end{array}\right\} \Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$

$\sim Bin\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right) =$

$= Bin(n, p) = Bin(n, 0.8)$

$E(20 \cdot S_n) = 20 E(S_n) = 20 \cdot n \cdot 0.8 = 16 \cdot n$

ii) nicht 3200€, $n \in \mathbb{N}$ = ?

$E(20 S_n) \leq 3200 \Leftrightarrow 16n \leq 3200 \Leftrightarrow n \leq 200 \Rightarrow n = 200$

b) $n = 100$; $S_n \sim Bin(n, p)$, $n = 100$, $p = 0.8$

i) $Var(S_{100}) = 100 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 16$

ii) alle 100 eingelöst werden:

$\{S_{100} = 100\}$ da $X_i = 1$ wenn Gutschein eingelöst, $i=1,\dots,n$

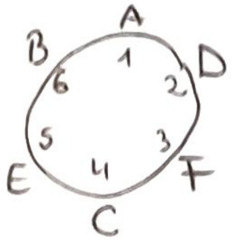
$S_{100} \sim Bin(100, 0.8)$

$\Rightarrow P(S_{100} = 100) = \underbrace{\binom{100}{100}}_{=1} \cdot 0.8^{100} \cdot \underbrace{0.2^{0}}_{=1} = 0.8^{100} \approx 2.037 \cdot 10^{-10}$

A20

A, B, C, D, E, F

A ↔ B



Auswahl der beiden A und B:

- ohne Wdh. (jeder Sitzplatz nur einmal vergeben)
- ohne Beachtung der Reihenfolge (egal ob A in 1 und B in 2 oder A in 2 und B in 1)

Urnenmodell 3:

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 6\}, \omega_1 < \omega_2\}$

oder $\omega_1 \neq \omega_2$

$\omega_1 \omega_2$ – Plätze von A, B.

$|\Omega| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

$P(N) = \frac{|N|}{|\Omega|} = \frac{|N|}{15}, \; N \subset \Omega$

N = "A und B nebeneinander"

$N = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (1,6)\}$

$P(N) = \frac{|N|}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Für $y>0$: nach (a) auch $f_Y(y)>0$. Daher:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

<u>für $x>1$:</u> $$f_{X|Y=y}(x) = \frac{\frac{y^2 e^{-\frac{1}{2}y}}{x^{4y+1}}}{\frac{1}{4} y e^{-1/2 y}} = \frac{4y}{x^{4y+1}}$$

<u>für $x \leq 1$:</u> $$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = 0.$$

($f_{X|Y=y}$ Dichte einer Par$(4y)$).

c) $y>\frac{1}{4}$: $E(X|Y=y)$ von X gegeben $Y=y$.

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y=y}(x)\, dx = 4y \int_1^{\infty} x^{-4y}\, dx =$$

$$= 4y \left[\frac{x^{-4y+1}}{-4y+1} \right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{4y}{4y-1}$$

A21

X, Y Zufallsvariablen

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Dichtefunktion $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \cdot e^{-y/2}}{x^{4y+1}} , & x > 1, y > 0 \\ 0 , & \text{sonst} \end{cases}$

a) z.z. Randdichte f_Y von Y: $f_Y(y) = \begin{cases} \cancel{} \frac{1}{4} y e^{-y/2} , & y > 0 \\ 0 , & \text{sonst} \end{cases}$

Für $y > 0$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{y^2 e^{-y/2}}{x^{4y+1}}\, dx =$$

$$= y^2 e^{-y/2} \int_1^{\infty} x^{-4y-1}\, dx = y^2 e^{-y/2} \left[-\frac{x^{-4y}}{4y} \right]_{x=1}^{x=\infty} =$$

$$= y^2 e^{-y/2} \cdot \frac{1}{4y} = \frac{1}{4} y e^{-\frac{1}{2}y}$$

Für $y \leq 0$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{(X,Y)}(x,y)}_{=0 \text{ für } y \leq 0}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dx = 0$$

Bemerkung: f_Y Dichtefkt einer $\Gamma(\frac{1}{2}, 2)$ Verteilung, siehe Globalübung A22.

b) Sei $y > 0$.

$f_{X|Y=y}$ von X gegeben $Y = y$.