Prof. Dr. A. Steland
N. Mause RWTH Aachen, SS 2023

Ausgabe: 23. Mai 2023 —— Kleingruppenübungen: vom 06.06 bis zum 09.06

Einführung in die angewandte Stochastik

Kleingruppenübung 6

Aufgabe 22

Seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und es gelte $X \sim U[0,6]$ und $Y \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$. Berechnen Sie

(a) $E(X+Y)$

(b) $\text{Var}(X-Y)$

(c) $E(XY)$

(d) $P(X \geq 6, Y \leq 2)$

(e) $P(X \leq 4, Y \leq \ln(4))$

Aufgabe 23

Seien X, Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_c(x,y) = \begin{cases} cy^2(2-x-y), & 0 < x < 1,\, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: f_c ist nur für $c = 4$ eine Dichtefunktion.

(b) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X und Y.

(c) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.

(d) Berechnen Sie $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$.

(e) Berechnen Sie $\text{Cov}(X,Y)$.

(f) Berechnen Sie $\text{Cor}(X,Y)$.

(g) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 24

Seien $Y \sim \text{Bin}\left(10, \frac{1}{2}\right)$ und $Z \sim \text{Poi}(2)$ mit $\text{Cov}(Y,Z) = 1$ gelte. Weiterhin betrachten wir den 3-dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$, dessen Komponenten durch

$$X_1 := 4Y, \quad X_2 := 2Y - 3Z \quad \text{und} \quad X_3 := -Z$$

definiert sind. Berechnen Sie den Erwartungswertvektor $\mu_{\mathbf{X}}$ und die Kovarianzmatrix $\operatorname{Cov}(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$.

Aufgabe 25

Sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ ein 2-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $\mu_X = 0 \in \mathbb{R}^2$ und Kovarianzmatrix

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, dessen Komponenten durch

$$Y_1 = X_1 - X_2 \quad \text{und} \quad Y_2 = X_1 + X_2$$

gegeben sind. Sind die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?