Prof. Dr. E. Cramer
Dipl.-Math. K. Herle

RWTH Aachen, SS 2010
17. Juni 2010

Einführung in die angewandte Stochastik

Lösung zur 6. Übung

Lösung Aufgabe 19

(a) Die Anzahl der pro Tag registrierten Hackerangriffe wird beschrieben durch eine Poisson-verteilte ZV X mit Parameter $\lambda = 6$ ($X \sim po(6)$). Nach B 2.5 ist die zugehörige Zähldichte definiert durch

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{6^k}{k!} e^{-6}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Folglich gilt:

(i) Die Wahrscheinlichkeit für genau fünf registrierte Angiffe ist gegeben durch

$$P(X = 5) = p_5 = \frac{6^5}{5!} e^{-6} \approx 0,161.$$

(ii) Die Wahrscheinlichkeit für mindestens vier registrierte Angriffe ist gleich

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - e^{-6} \sum_{k=0}^{3} \frac{6^k}{k!} = 1 - e^{-6}(1 + 6 + 18 + 36) \approx 0,849. \end{aligned}$$

(b) Sei $X \sim Exp(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Dann ist nach B 3.7 die zugehörige Verteilungsfunktion gegeben durch:

$$F^X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(i) Sei $\lambda = \frac{1}{800}$. Dann gilt:

(I) $P(X \leq 300) = F^X(300) = 1 - e^{-3/8} \approx 0,313$

(II) $P(X > 120) = 1 - P(X \leq 120) = 1 - F^X(120) = e^{-3/20} \approx 0,861$

(III) Da die Verteilungsfunktion von X stetig ist (vgl. C 2.4), folgt

$$\begin{aligned} P(240 < X < 360) &= P(240 \leq X \leq 360) = P(240 < X \leq 360) \\ &= F^X(360) - F^X(240) = 1 - e^{-9/20} - (1 - e^{-3/10}) \approx 0,103. \end{aligned}$$

(ii) Gesucht wird $\lambda > 0$ mit $P(X \geq 100) = 0,99$. Die Lösung ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} P(X \geq 100) &= P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) \\ &= 1 - F^X(100) = e^{-100\lambda} \overset{!}{=} 0,99 \\ \iff \quad & -100\lambda = \ln(0,99) \\ \iff \quad & \lambda = -\frac{\ln(0,99)}{100} \approx 0,0001005 = 1,005 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 20

Die gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X, falls (vgl. B 3.4):

(a) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

(i) Aus (a) folgt $c \geq 0$. Aus (b) ergibt sich

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{2}^{7} \frac{c}{\sqrt{x+2}}dx = 2c\sqrt{(x+2)}\,\Big|_2^7 = 2c,$$

d.h. für $c = \frac{1}{2}$ ist f eine Dichtefunktion.

(ii) Die Verteilungsfunktion $F^X : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X ist gegeben durch (vgl. C 2.2(ii)):

$$F^X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mit $c = \frac{1}{2}$ folgt

- für $t < 2$:
$$F^X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0.$$
- für $2 \leq t < 7$:
$$F^X(t) = \int_{2}^{t} \frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx = \sqrt{(x+2)}\,\Big|_2^t = \sqrt{t+2} - 2.$$
- für $t \geq 7$:
$$F^X(t) = \int_{2}^{7} \frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx = \sqrt{9} - 2 = 1.$$

Zusammengefasst ergibt sich also für die Verteilungsfunktion:

$$F^X(t) = \begin{cases} 0, & t < 2, \\ \sqrt{t+2} - 2, & 2 \leq t < 7, \\ 1, & t \geq 7. \end{cases}$$

Lösung Aufgabe 21

Es gilt allgemein für diskrete Zufallsvariablen X und Y mit Werten in $\mathbb{Z}$ (vgl. Beweis zu Satz C 1.13):

$$P(X+Y=k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} P(X=j, Y=k-j), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Seien X und Y Zufallsvariablen mit $P(X=k) = P(Y=k+1) = 1/4$ für $k \in \{0,1,2,3\}$.

(a) Aufgrund der Unabhängigkeit gilt in diesem Fall (vgl. Satz C 1.13)

$$P(X+Y=k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} P(X=j)P(Y=k-j), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt (beachte die Träger der Verteilungen von X und Y!):

$$\begin{aligned}
P(X+Y=1) &= P(X=0)P(Y=1) = \frac{1}{16}\\
P(X+Y=2) &= P(X=1)P(Y=1) + P(X=0)P(Y=2) = \frac{1}{8}\\
P(X+Y=3) &= P(X=0)P(Y=3) + P(X=1)P(Y=2) + P(X=2)P(Y=1) = \frac{3}{16}\\
P(X+Y=4) &= P(X=0)P(Y=4) + P(X=1)P(Y=3)\\
&\qquad + P(X=2)P(Y=2) + P(X=3)P(Y=1) = \frac{1}{4}\\
P(X+Y=5) &= P(X=1)P(Y=4) + P(X=2)P(Y=3) + P(X=3)P(Y=2) = \frac{3}{16}\\
P(X+Y=6) &= P(X=2)P(Y=4) + P(X=3)P(Y=3) = \frac{1}{8}\\
P(X+Y=7) &= P(X=3)P(Y=4) = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Aufgrund der Träger von X und Y nimmt $X+Y$ nur Werte in der Menge $\{1,\dots,7\}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit an.

(b) Gilt für die gemeinsame Verteilung

$$P(X=k, Y=k+1) = 1/4, \quad k \in \{0,1,2,3\},$$

so folgt

$$\begin{aligned}
P(X+Y=1) &= P(X=0, Y=1) = \frac{1}{4},\\
P(X+Y=3) &= P(X=1, Y=2) = \frac{1}{4},\\
P(X+Y=5) &= P(X=2, Y=3) = \frac{1}{4},\\
P(X+Y=7) &= P(X=3, Y=4) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Die Summe $X+Y$ nimmt in diesem Fall nur Werte in der Menge $\{1,3,5,7\}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit an.

Lösung Aufgabe 22

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= \sum_{j=1}^{3} P(X=i, Y=j) = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3}, \quad i \in \{-1,0,1\},\\
P(Y=j) &= \sum_{i=-1}^{1} P(X=i, Y=j) = p_{-1j} + p_{0j} + p_{1j}, \quad j \in \{1,2,3\}.
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}
P(X=-1) &= \frac{1}{20}+\frac{1}{5}+0=\frac{1}{4},\\
P(X=0) &= \frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2},\\
P(X=1) &= \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4},\\
P(Y=1) &= \frac{1}{20}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{7}{20},\\
P(Y=2) &= \frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2},\\
P(Y=3) &= 0+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{3}{20}.
\end{aligned}$$

Die Zufallsvariablen X und Y sind nicht stochastisch unabhängig, da beispielsweise

$$P(X=-1,Y=3)=0\neq\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{20}=P(X=-1)P(Y=3).$$

(b) Wegen

$$P(Y=j|X=1)=\frac{P(X=1,Y=j)}{P(X=1)},\quad j\in\{1,2,3\},$$

folgt aus der Aufgabenstellung und (a):

$$\begin{aligned}
P(Y=1|X=1) &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{5},\\
P(Y=2|X=1) &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{5},\\
P(Y=3|X=1) &= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
P(X=0|Y\geq 2) &= \frac{P(X=0,Y\geq 2)}{P(Y\geq 2)}=\frac{P(X=0,Y=2)+P(X=0,Y=3)}{P(Y=2)+P(Y=3)}\\
&= \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{20}}=\frac{6}{13}.
\end{aligned}$$

(d) Die Verteilung der Zufallsvariablen $Z=X+Y$ hat den Träger $\{0,1,2,3,4\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= P(X=-1,Y=1)=p_{-11}=\frac{1}{20},\\
P(Z=1) &= P(X=-1,Y=2)+P(X=0,Y=1)=p_{-12}+p_{01}=\frac{2}{5},\\
P(Z=2) &= P(X=-1,Y=3)+P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)\\
&= p_{-13}+p_{02}+p_{11}=\frac{3}{10},\\
P(Z=3) &= P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=2)=p_{03}+p_{12}=\frac{1}{5},\\
P(Z=4) &= P(X=1,Y=3)=p_{13}=\frac{1}{20}.
\end{aligned}$$