

Einführung in die angewandte Stochastik

Kleingruppenübung 7

Für die Bearbeitung der Aufgaben auf diesem Übungsblatt benötigen Sie die Tabelle mit Funktionswerten der Standardnormalverteilung, die Sie am Ende des Übungsblattes finden können.

Aufgabe 26

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $E(X) = 10$ und $\text{Var}(X) = 4$. Verwenden Sie die Tschebyscheff - Ungleichung um $P(7 < X < 13)$ geeignet **nach unten** abzuschätzen.

Aufgabe 27

An einer Wahl zwischen Kandidat A und B nehmen 1 000 000 Wähler teil. 2 000 Wähler gehören zur Partei von A und stimmen geschlossen für Kandidat A. Die übrigen 998 000 Wähler sind mehr oder weniger unentschlossen und treffen ihre Entscheidung unabhängig voneinander durch Werfen einer fairen Münze mit den beiden Seiten „Kopf“ und „Zahl“. Der Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt die Wahl.

In dieser Aufgabe möchten wir approximativ die Wahrscheinlichkeit p_A , dass Kandidat A die Wahl gewinnt, berechnen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Definieren Sie zu dieser Situation geeignete Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \dots, n$, mit $n = 998000$ und geben Sie Ihre Verteilung (inklusive aller vorkommenden Parameter) explizit an.
- Sei nun $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Bestimmen Sie $E(S_n)$ und $\text{Var}(S_n)$.
- Bestimmen Sie nun approximativ $P(S_n > 498000)$. Sie können dabei verwenden, dass für die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung $1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gilt.

Aufgabe 28

Seien X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu = 100$ und Varianz $\sigma^2 = 43$.

Berechnen Sie mit dem Zentralen Grenzwertsatz Näherungen für folgende Wahrscheinlichkeiten:

- $P(\bar{X}_n \leq 101)$ für $n = 100$,
- $P(101 \leq \bar{X}_n \leq 102)$ für $n = 64$,
- $P(\bar{X}_n > 99)$ für $n = 165$.

Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung gilt $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$

| Verteilungsfunktion $\Phi(x + h)$ | | | | | | | | | | |
|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | h | | | | | | | | | |
| | 0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
| 0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |

Beispiel: $X \sim \mathcal{N}(3,9)$,
 $P(X \leq 4.26) = P\left(\frac{X-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{4.26-3}{3}\right) = P(X \leq 0.42) = 0.6628$

Abbildung 1: Tabelle zur Standardnormalverteilung aus dem Buch „Basiswissen Statistik“ von Prof. Dr. A. Steland