Prof. Dr. E. Cramer
Dipl.-Math. K. Herle

RWTH Aachen, SS 2010
24. Juni 2010

Einführung in die angewandte Stochastik

Lösung zur 7. Übung

Lösung Aufgabe 23

(i) Die Behauptung lässt sich analog zu Beispiel C 4.1(i) zeigen. Hier wird eine Herleitung mittels Satz C 4.2 gewählt.
Seien $a > 0$ und $X \sim \Gamma(\alpha, \beta), \alpha, \beta > 0$. Betrachte $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit $g(x) = ax$ für $x > 0$. Die bijektive Funktion g erfüllt die Voraussetzungen von Satz C 4.2. Insbesondere gilt $g^{-1}(y) = \frac{1}{a}\, y$ und $(g^{-1})'(y) = \frac{1}{a}$ für $y > 0$. Es folgt für die Dichte der Zufallsvariable $Y = g(X) = aX$:

$$\begin{aligned}
f^{\,aX}(y) &= f^Y(y) \\
&\overset{\text{C 4.2}}{=} |(g^{-1})'(y)|\, f^X(g^{-1}(y)) \\
&= \frac{1}{a} f^X\left(\frac{y}{a}\right) \\
&\overset{X\sim\Gamma(\alpha,\beta)}{=} \frac{1}{a}\,\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{y}{a}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\alpha\,\frac{y}{a}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{\alpha}{a}\right)^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} \exp\left(-\frac{\alpha}{a}\, y\right), \quad y > 0.
\end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um die Dichte einer Gamma-Verteilung mit den Parametern α/a und β (vgl. B 3.9). Also gilt $aX \sim \Gamma(\alpha/a, \beta)$.

(ii) Die Aussage lässt sich ebenfalls mit Satz C 4.2 zeigen. Hier wird ähnlich wie in Beispiel C 4.1(i) (bzw. mit Lemma C 2.7(iv)) argumentiert.
Betrachte $h : (0, 1) \to (0, \infty)$ mit $h(y) = -\ln(1 - y)$ für $y \in (0, 1)$. Die Funktion h ist streng monoton wachsend und stetig. Die Umkehrfunktion von h ist $h^{-1}(z) = 1 - e^{-z}, z > 0$. Also gilt für die Verteilung der Zufallsvariable $Z = h(Y)$, falls $Y \sim R(0, 1)$ (vgl. B 3.6):

$$\begin{aligned}
P(Z \le z) &= P(h(Y) \le z) = P(\ln(1 - Y) \ge -z) \\
&= P(1 - Y \ge e^{-z}) = P(Y \le 1 - e^{-z}) \\
&= P(Y \le h^{-1}(z)) \overset{Y\sim R(0,1)}{=} h^{-1}(z) \\
&= 1 - e^{-z}, \quad z > 0.
\end{aligned}$$

Also folgt Z einer Exponentialverteilung $Exp(1)$. (Da h mit der Quantilfunktion der Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung übereinstimmt, kann die Aussage auch direkt aus Lemma C 2.7(iv) gefolgert werden.)

Lösung Aufgabe 24

(a) Mit Hilfe der Resultate aus Aufgabe 22(a) ergibt sich:

$$E(X) = \sum_{i=-1}^{1} i\, P(X = i) = -P(X = -1) + P(X = 1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0,$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{3} j\, P(Y = j) = P(Y = 1) + 2P(Y = 2) + 3P(Y = 3) = \frac{7}{20} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{9}{5}.$$

(b) Es gilt

$$E(X^2) = \sum_{i=-1}^{1} i^2\, P(X = i) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{j=1}^{3} j^2\, P(Y = j) = P(Y = 1) + 4P(Y = 2) + 9P(Y = 3) \\ &= \frac{7}{20} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{3}{20} = \frac{37}{10}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - 0^2 = \frac{1}{2},$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{37}{10} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{23}{50}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=1}^{3} i\, j\, P(X = i, Y = j) \\ &= -P(X = -1, Y = 1) - 2P(X = -1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) \\ &\quad + 2P(X = 1, Y = 2) + 3P(X = 1, Y = 3) \\ &= -\frac{1}{20} - 2 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{20} = 0. \end{aligned}$$

Also folgt

$$Kov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \cdot \frac{9}{5} = 0$$

und damit auch $Korr(X, Y) = 0$ (vgl. C 5.17(ii)), d.h. X und Y sind unkorreliert.

Beachte: Laut Aufgabe 22(a) sind X und Y *nicht* stochastisch unabhängig. Dies ist ein weiteres Beispiel dafür, dass aus Unkorreliertheit nicht die stochastische Unabhängigkeit folgt (vgl. auch C 5.20).

Lösung Aufgabe 25

(a) Die vollständig ausgefüllte Tabelle sieht folgendermaßen aus:

$Y=j$ / $X=i$	1	2	3	4	5
1	0	0,1	0	0,1	0,2
2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1
$P(Y=j)$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,3

(b) Es gilt

$$P(X=i)=\sum_{j=1}^{5}P(X=i,Y=j),\quad 1\le i\le 2.$$

Also ergibt sich mit den Angaben der Tabelle aus (a):

$$\begin{aligned}P(X=1)&=0+0,1+0+0,1+0,2=0,4,\\P(X=2)&=0,1+0,1+0,1+0,2+0,1=0,6.\end{aligned}$$

Die Zufallsvariablen X und Y sind nicht stochastisch unabhängig, denn

$$P(X=1,Y=1)=0\neq 0,4\cdot 0,1=P(X=1)P(Y=1).$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}E(X)&=P(X=1)+2P(X=2)=0,4+2\cdot 0,6=1,6,\\E(X^2)&=P(X=1)+2^2P(X=2)=0,4+4\cdot 0,6=2,8,\\Var(X)&=E(X^2)-(E(X))^2=2,8-(1,6)^2=0,24.\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i}P(X=i)=P(X=1)+\frac{1}{2}\cdot P(X=2)=0,4+\frac{1}{2}\cdot 0,6=0,7.$$