KGÜ 7

A26

X Zv. auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$E(X) = 10$
$Var(X) = 4.$

T. Ungleichung $P(7 < X < 13)$ nach unten

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P(|X - E(X)| < \varepsilon) > 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

$P(7 < X < 13) = ?$

$$7 < X < 13 \quad | - E(X)$$
$$7 - E(X) < X - E(X) < 13 - E(X)$$
$$-3 < X - 10 < 3$$
$$\Rightarrow P(-3 < X - 10 < 3) = P(|X - E(X)| < 3) > 1 - \frac{4}{3^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

A27.

Kandidat A, B

1.000.000 Wähler – 2.000 → A
998.000 unentschlossen, fairen Münze K, Z

a) $X_i, i = 1, \dots, n$ mit $n = 998.000$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{„Kandidat A wird gewählt"} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

X_i unabhängig voneinander und identisch verteilt

$X_i \sim Ber(p)$, $p = \frac{1}{2}$ (wegen fairen Münzwurf).

b) $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $(998.000/2 = 499.000)$

A gewinnt, wenn $S_n > 498000$

mit 2000 von früher $\Rightarrow$ $S_n > 500.000$ gilt

Σ von unabhängigen Bernoulli-verteilte ZV. gilt

$$S_n \sim Bin(n, p), \quad n = 998.000, \quad p = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $E(S_n) = n \cdot p$
$Var(S_n) = np(1-p)$ } gemäß VL.

c) $P(S_n > 498.000)$

Φ, $1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Mit dem Zentralem Grenzwertsatz:

$$P(S_n > 498.000) =$$

$$= P\left(\frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{498.000 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}}\right) =$$

$$\overset{ZGWS}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{498000 - 998000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{998.000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) \approx 1 - \Phi(-2{,}002) \approx$$

$$\approx \Phi(2.002) =$$

$$= 0.9772$$

A28

$X_1, \dots, X_m$ s.u. id. verteilte ZV, Ew. $\mu = 100$, Var $\sigma^2 = 43$
$\sigma = \sqrt{43}$

a) $P(\overline{X}_m \leq 101)$, $m = 100$

$$P(\overline{X}_m \leq 101) = P\left(\sqrt{m}\,\frac{\overline{X}_m - \mu}{\sigma} \leq 10 \cdot \frac{101-100}{\sqrt{43}}\right) \overset{ZGWS}{\approx}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{43}}\right) = \Phi(1.52) = 0{,}9357$$

$\Rightarrow 93{,}6\,\%$

$$\overline{X}_m \leq 101 \quad |(-\mu)$$
$$\overline{X}_m - \mu \leq 101 - \mu \quad |\cdot \sqrt{m}$$
$$\sqrt{m}(\overline{X}_m - \mu) \leq \sqrt{m}\,(101-\mu) \quad |\cdot \frac{1}{\sigma}$$
$$\sqrt{m} \cdot \frac{\overline{X}_m - \mu}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{m}\,(101-\mu)}{\sigma}$$

b) $P(101 \leq \overline{X}_m \leq 102)$, $m = 64$

$$= P\left(\sqrt{64} \cdot \frac{101-100}{\sqrt{43}} \leq \sqrt{m} \cdot \frac{\overline{X}_m - \mu}{\sigma} \leq \sqrt{64} \cdot \frac{102-100}{\sqrt{43}}\right) =$$

$$= P\left(\overset{\approx 1.22}{\frac{8}{\sqrt{43}}} \leq \sqrt{m}\,\frac{\overline{X}_m - \mu}{\sigma} \leq \overset{\approx 2.44}{\frac{16}{\sqrt{43}}}\right) \approx \quad F(b) - F(a).$$

$$\approx \Phi(2.44) - \Phi(1.22) = 0{,}9927 - 0.8888 = 0{,}1038 \quad \Rightarrow 10{,}4\,\%$$

c) $P(\overline{X}_m > 99)$, $m = 165$

$$= 1 - P(\overline{X}_m \leq 99) =$$

$$= 1 - P\left(\sqrt{m}\,\frac{\overline{X}_m - \mu}{\sigma} \leq \sqrt{165} \cdot \frac{99-100}{\sqrt{43}}\right)$$

$$\overset{ZGWS}{\approx} 1 - \Phi(-1{,}96) = \Phi(1.96) = 0{,}975 \quad \Rightarrow 97{,}5\,\%$$