Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS 2023

Ausgabe: 27. Juni 2023 —— Kleingruppenübungen: vom 04.07 bis zum 07.07

Einführung in die angewandte Stochastik

Kleingruppenübung 9

Aufgabe 35

Gegeben seien n i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Die Zähldichte sei jeweils gegeben durch

$$P(X_1 = k) = p(1-p)^k, \qquad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

für einen Parameter $p \in (0,1)$. Berechnen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{p}$ für den Parameter p basierend auf gegebenen Realisationen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$ der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, wobei $\bar{x} > 0$ gelte, d.h. wir schließen den Fall $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ aus.

Aufgabe 36

Gegeben seien n i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die jeweils auf dem Intervall $[0, b]$ (stetig) gleichverteilt mit unbekannter oberer Intervallgrenze $b > 0$ sind. Um b aus zugehörigen Realisationen $x_1, \ldots, x_n$ zu schätzen betrachten wir den Schätzer

$$\hat{b}_n := 2\overline{X}_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a) Ist $\hat{b}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter b?

(b) Berechnen Sie die Varianz von $\hat{b}_n$.

(c) Sei $\tilde{b}_n$ ein anderer erwartungstreuer Schätzer für b mit $\operatorname{Var}(\tilde{b}_n) = \frac{b^2}{2n}$. Welchen der beiden Schätzer $\hat{b}_n$ und $\tilde{b}_n$ sollten Sie zur Schätzung von b verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 37

Seien $X, Y, Z \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 1)$ normalverteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit unbekanntem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$. Zur Schätzung von μ möchten wir den Schätzer

$$\hat{\mu} := \frac{1}{3}(X + 2Y + 2Z)$$

verwenden. Bestimmen Sie den mittleren quadratischen Fehler $\operatorname{MSE}(\hat{\mu}, \mu)$.