Prof. Dr. E. Cramer
Dipl.-Math. K. Herle

RWTH Aachen, SS 2010
08. Juli 2010

Einführung in die angewandte Stochastik

Lösung zur 9. Übung

Lösung Aufgabe 30

(a) Für $y > 0$ gilt:

$$f^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{\infty} \frac{y^s e^{-(x+1)y}}{(s-1)!}dx = \frac{y^s e^{-y}}{(s-1)!} \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-xy}dx$$
$$= \frac{y^s e^{-y}}{(s-1)!} \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{y^s e^{-y}}{(s-1)!} \left(-\lim_{a\to\infty} \frac{e^{-ay}}{y} + \frac{1}{y}\right) = \frac{y^{s-1}e^{-y}}{(s-1)!}.$$

Für $y \leq 0$ erhalten wir

$$f^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f^{X,Y}(x,y)}_{=0 \text{ nach Vor.}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \; dx = 0.$$

Y besitzt somit eine Gammaverteilung $\Gamma(1,s)$ mit Parametern 1 und s (beachte: $\Gamma(s) = (s-1)!,\ s \in \mathbb{N}$).

(b) Für gegebenes $y > 0$ gilt nach (a) $f^Y(y) > 0$ und damit (vgl. Def. C 7.1) für $x > 0$

$$f^{X|Y=y}(x) = \frac{f^{X,Y}(x,y)}{f^Y(y)} \overset{(a),Vor.}{=} \frac{\frac{y^s e^{-(x+1)y}}{(s-1)!}}{\frac{y^{s-1}e^{-y}}{(s-1)!}} = ye^{-yx}.$$

Für $x \leq 0$ erhalten wir

$$f^{X|Y=y}(x) = \frac{\overbrace{f^{X,Y}(x,y)}^{=0 \text{ nach Vor.}}}{f^Y(y)} = 0.$$

Folglich handelt es sich bei $f^{X|Y=y}$ um die Dichte der Exponentialverteilung $Exp(y)$ mit Parameter y.

(c) Mit C 7.4 und der Regel der partiellen Integration erhalten wir für gegebenes $y > 0$:

$$E[X|Y=y] = \int x f^{X|Y=y}(x)dx \overset{(b)}{=} \lim_{a\to\infty} \int_0^a xye^{-xy}dx$$
$$= \lim_{a\to\infty} \left[x \cdot \left(-e^{-xy}\right)\right]_{x=0}^{x=a} + \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-xy}dx$$
$$= \left(\lim_{a\to\infty} (-ae^{-ya}) + 0\right) + \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-xy}dx$$
$$= \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x=a} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{y}(1 - e^{-ay}) = \frac{1}{y}.$$

Lösung Aufgabe 31

Zum Modell: Die Störungen werden beschrieben durch Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{200}$ mit der Interpretation

$$X_i = \begin{cases} 1, & i\text{-ter Automat fällt mindestens einmal aus,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, 200.$$

Gemäß Aufgabenstellung sind $X_1, \ldots, X_{200}$ stochastisch unabhängig mit $X_i \sim bin(1,\, 0{,}05), i = 1, \ldots, 200$. Also gilt gemäß C 1.14(i):

$$S_{200} = \sum_{i=1}^{200} X_i \sim bin(200,\, 0{,}05).$$

Mit $n = 200$, $p = 0{,}05 = 1/20$ folgt gemäß C 5.2 und C 5.13:

$$E(S_n) = np = 200 \cdot \frac{1}{20} = 10, \quad Var(S_n) = np(1-p) = 200 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = 9{,}5.$$

Damit lassen sich nun beide Aufgabenteile lösen:

(a) Zunächst gilt

$$\begin{aligned} P(5 \leq S_n \leq 15) &= P(-5 \leq S_n - 10 \leq 5) \\ &= P(|S_n - E(S_n)| \leq 5) \\ &\geq P(|S_n - E(S_n)| < 5) \\ &= 1 - P(|S_n - E(S_n)| \geq 5). \end{aligned}$$

Aus der Tschebyscheff-Ungleichung (vgl. C 5.22(iii)) folgt dann

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq 5) \leq \frac{Var(S_n)}{5^2}$$

und daher

$$\begin{aligned} P(5 \leq S_n \leq 15) &\geq 1 - P(|S_n - E(S_n)| \geq 5) \\ &\geq 1 - \frac{Var(S_n)}{5^2} \\ &= 1 - \frac{9{,}5}{25} = 0{,}62. \end{aligned}$$

(b) Beachte, dass mit den obrigen Bezeichnungen

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} P(5 \leq S_n \leq 15) &\overset{S_n \in \mathbb{N}_0}{=} P(S_n \leq 15) - P(S_n \leq 4) \\ &\overset{Standardisierung}{=} P\left(\frac{S_n - 10}{\sqrt{9{,}5}} \leq \frac{15-10}{\sqrt{9{,}5}}\right) - P\left(\frac{S_n - 10}{\sqrt{9{,}5}} \leq \frac{4-10}{\sqrt{9{,}5}}\right) \end{aligned}$$

Der Zentrale Grenzwertsatz (siehe C 8.6) liefert nun

$$P\left(\frac{S_n - 10}{\sqrt{9{,}5}} \leq t\right) \approx \Phi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
P(5 \le S_n \le 15) &\approx \Phi\left(\frac{15-10}{\sqrt{9,5}}\right) - \Phi\left(\frac{4-10}{\sqrt{9,5}}\right) \\
&\approx \Phi(1,62) - \Phi(-1,95) \\
&= \Phi(1,62) - (1 - \Phi(1,95)).
\end{aligned}$$

Eine Tabelle der Funktionswerte der Standardnormalverteilung (siehe z.B. Formelsammlung *Statistik griffbereit*, 4. Auflage, S. 33) liefert $\Phi(1,62) \approx 0,947$ und $\Phi(1,95) \approx 0,974$. Damit folgt schließlich

$$P(5 \le S_n \le 15) \approx \Phi(1,62) - (1 - \Phi(1,95)) \approx 0,947 - 1 + 0,974 = 0,921.$$

Lösung Aufgabe 33

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim R(0,b)$ mit $b > 0$.
(a) Laut C 5.2(iii) gilt $EX_i = \frac{b}{2}$, $i = 1, \ldots, n$. Hiermit folgt für $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
E_b\hat{b}_n &= E_b\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \underbrace{EX_i}_{=b/2} \\
&= \frac{2}{n} n \frac{b}{2} = b.
\end{aligned}$$

Somit ist $\hat{b}_n$ erwartungstreu für b.
(b) Laut C 5.13(iii) gilt $Var(X_i) = \frac{b^2}{12}$, $i = 1, \ldots, n$. Hiermit folgt für $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
Var_b\hat{b}_n &= Var_b\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n \underbrace{VarX_i}_{b^2/12} \\
&= \frac{4}{n^2} n \frac{b^2}{12} = \frac{b^2}{3n}.
\end{aligned}$$