KGÜ9

A34

Seien $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{N}_0$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$

$$L(p \mid x_1,\dots,x_n) =$$
$$= P_p(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i} =$$
$$= p^n (1-p)^{n\cdot\bar{x}}$$

$$\ell(p \mid x_1,\dots,x_n) = \ell(p) = \cancel{\ln L(p)}$$
$$= \ln(L(p \mid x_1,\dots,x_n)) =$$
$$= n\cdot\ln(p) + n\cdot\bar{x}\ln(1-p)$$

$$\ell'(p) = \frac{n}{p} - \frac{n\bar{x}}{1-p}$$

1. erstmal lokales max:

$$\ell'(p) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{n}{p} - \frac{n\bar{x}}{1-p} = 0$$
$$\Leftrightarrow n(1-p) - pn\bar{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow n - np(1+\bar{x}) = 0$$
$$1 - p(1+\bar{x}) = 0$$
$$p = \underbrace{\frac{1}{1+\bar{x}}}_{=:\hat{p}}$$

$$\frac{1}{1+\bar{x}} - p \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0$$
$$\Leftrightarrow p \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} \frac{1}{1+\bar{x}} = \hat{p}$$

weiterhin: $\ell'(p) > 0 \Leftrightarrow p < \hat{p}$

$\ell'(p) < 0 \Leftrightarrow p > \hat{p}$

$\Rightarrow$ $\ell(p)$ auf $(0,\hat{p})$ streng monoton wachsend, $\ell(p)$ auf $(\hat{p},1)$ streng monoton fallend $\Bigg\} \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{1+\bar{x}}$ globales maximum

A36

$[0,b]$ (stetig)

$b>0$

$\hat{b}_n := 2\bar{X}_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Seien $X_1, .., X_n$ unabhängig und id. verteilt mit $X_1 \sim \mathcal{U}(0,b)$, $b>0$.

a) $\hat{b}_n$ für b?

X_i i.i.d, jeweils stetig gleichverteilt auf $[0,b]$

$\Rightarrow E(X_i) = \frac{b}{2}$, $i=1,..,n$.

für $b>0$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$E_b(\hat{b}_n) = E_b\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{b/2} =$$

$$= \frac{2}{n} \cdot n \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = b.$$

b) $Var(\hat{b}_n) = ?$

$Var(X_i) = \frac{b^2}{12}$ $i=1,..,n$.

$b>0, n \in \mathbb{N}: \Rightarrow$ $Var_b(\hat{b}_n) = Var_b\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{Var(X_i)}_{= b^2/12} =$$

$$= \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \left(\frac{b^2}{12}\right) = \frac{b^2}{3n}$$

) $\hat{b}_n$ und $\tilde{b}_n$ beide erwartungstreu

$\Rightarrow$ $Var(\hat{b}_n) < Var(\tilde{b}_n) \Leftrightarrow \frac{b^2}{3n} < \frac{b^2}{2n} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\hat{b}_n$ effizienter als $\tilde{b}_n$ ist.

A37

$X, Y, Z \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 1)$

$\mu \in \mathbb{R}$

$\hat{\mu} = \frac{1}{3}(X + 2Y + 2Z)$

$MSE(\hat{\mu}, \mu)$

$X, Y, Z \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 1)$

$\Rightarrow E_\mu(\hat{\mu}) = \frac{1}{3}(E(X) + 2E(Y) + 2E(Z)) =$

$= \frac{1}{3}(\mu + 2\mu + 2\mu) = \frac{5}{3}\mu$

$\hat{\mu}$ nicht erwartungstreu

$\Rightarrow \cancel{V}Var_\mu(\hat{\mu}) = \frac{1}{9}(Var(X) + 4Var(Y) + 4Var(Z)) =$

$= \frac{1}{9}(1 + 4 + 4) = \frac{9}{9} = 1.$

$Bias(\hat{\mu}, \mu) = E_\mu(\hat{\mu}) - \mu = \frac{5}{3}\mu - \mu = \frac{2}{3}\mu$

$MSE(\hat{\mu}, \mu) = Var_\mu(\hat{\mu}) + (Bias(\hat{\mu}, \mu))^2 = 1 + (\frac{2}{3}\mu)^2 =$

$= 1 + \frac{4}{9}\mu^2.$