

Ausgabe: 11. Juli 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Wiederholungsblatt

*Dieses Übungsblatt dient der Wiederholung behandelter Themen. Die Lösungen zu diesem Wiederholungsblatt befinden sich im Lernraum. Die tatsächlichen Klausuraufgaben müssen weder vom Umfang, vom Inhalt oder der Schwierigkeit mit diesen Wiederholungsaufgaben übereinstimmen! Dieses Wiederholungsblatt ist **keine Probeklausur**.*

Aufgabe W1

Seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C, D \in \mathcal{F}$ Ereignisse mit

$$P(A \setminus B) = \frac{1}{6}, \quad P(C \cup D) = \frac{1}{6}, \quad P(B^c) = \frac{1}{2}, \quad P((A \setminus B^c) \cup C) = 0.$$

Welche der Aussagen

- (a) $P(A) = \frac{1}{3}$,
- (b) $P(B) = \frac{1}{2}$,
- (c) $P(C) = 0$,
- (d) $P(D) = \frac{1}{6}$,
- (e) $A \cup B \cup C \cup D = \Omega$,

sind korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Aussage.

Aufgabe W2

Fünf Karten, die mit den Zahlen eins bis fünf beschriftet sind, werden verdeckt, gemischt und nebeneinander auf einen Tisch gelegt. Die erste Karte wird aufgedeckt und ihr Wert notiert. Im Anschluss werden alle fünf Karten verdeckt neu gemischt und wieder nebeneinander gelegt. Nun wird die zweite Karte der neuen Reihe aufgedeckt und auch ihr Wert notiert. Beschreiben Sie dieses Experiment durch Angabe einer geeigneten Ergebnismenge und eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die 2. Karte einen Wert zeigt, der den Wert der 1. Karte um mindestens zwei übersteigt.

Aufgabe W3

Eine Urne enthält drei mit den Zahlen 1, 2 und 3 nummerierte schwarze Kugeln. Eine andere Urne enthält zwei nummerierte blaue Kugeln mit den Zahlen 1 und 2. Es werden gleichzeitig eine schwarze und eine blaue Kugel aus den beiden Urnen durch eine faire Ziehung gezogen. Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß für dieses Experiment an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die gezogene schwarze Kugel die Nummer 3 hat.

Aufgabe W4

Ein Hersteller von Regenschirmen produziert seine aktuelle Kollektion an drei verschiedenen Standorten S_1, S_2, S_3 . Ihm ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein am Standort S_1 produzierter Schirm defekt ist, 0.008 beträgt, und die, dass ein am Standort S_2 produzierter Schirm defekt ist, 0.02 ist. Die Produktion der aktuellen Kollektion teilt sich wie folgt auf:

$$P(S_1) = 0.5, \quad P(S_3) = 0.3$$

Weiterhin ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen defekten Schirm in der Gesamtkollektion bei 0.02 liegt.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein defekter Schirm am Standort S_2 gefertigt worden ist.
- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein am Standort S_3 produzierter Regenschirm intakt ist.

Aufgabe W5

Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen.

- (a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \{1, \dots, 6\}$ gilt: Die Ereignisse

„Der erste Wurf zeigt Ziffer k “
und

„Die Summe der Ziffern beider Würfe ist durch drei teilbar“

sind stochastisch unabhängig.

- (b) Gibt es ein $k \in \{1, \dots, 6\}$, so dass die Ereignisse

„Der erste Wurf zeigt Ziffer k “
und

„Das Produkt der Ziffern beider Würfe ist durch drei teilbar“

stochastisch unabhängig sind?

Aufgabe W6

Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit

$$P(X = k) = P(Y = k + 1) = 1/4$$

für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

- (a) Bestimmen Sie Verteilung von $X+Y$ unter der Annahme, dass X und Y stochastisch unabhängig sind.
- (b) Wie sieht die Verteilung von $X + Y$ aus, falls X und Y *nicht* stochastisch unabhängig sind, sondern die gemeinsame Verteilung

$$P(X = k, Y = k + 1) = 1/4, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

besitzen?

Hinweis: Globalübung 5, Aufgabe 21.

Aufgabe W7

Sei X eine reellwertige, stetige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-x), & x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- (a) $E(X) = -\frac{1}{3}$
- (b) $\text{Var}(X) = \frac{2}{9}$
- (c) $P(X \in (-1, 0)) = \frac{3}{4}$
- (d) $F_X(0) = \frac{1}{2}$
- (e) $P(X = 0) = \frac{1}{2}$

Aufgabe W8

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und X eine stetige Zufallsvariable, deren Dichtefunktion $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ definiert ist durch:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad x \in [a, b] , \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus [a, b] . \end{cases}$$

(Dann besitzt X eine (stetige) Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$, kurz $X \sim U[a, b]$.)

- (a) Bestimmen Sie (allgemein für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig):
 - (i) $E(X)$,
 - (ii) $\text{Var}(X)$,
 - (iii) $E(X^3 - 5e^X)$.
- (b) Berechnen Sie die in (a) bestimmten Kenngrößen für die spezielle Parameterwahl $a = -2$ und $b = 4$.

Aufgabe W9

Gegeben seien die folgenden, jeweils auf \mathbb{R} definierten Funktionen:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 2, \\ x - 2 & , \quad 2 \leq x < 4, \\ 1 & , \quad x \geq 4, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0, \\ e^{-x} & , \quad x \geq 0, \end{cases}$$

$$F_3(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Welche dieser Funktionen können *nicht* Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen sein?

Aufgabe W10

Die Verteilungsfunktion F^X einer stetigen Zufallsvariablen X sei gegeben durch

$$F^X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-x/2} (x + 2) & , \quad x \geq 0 , \\ 0 & , \quad x < 0 . \end{cases}$$

Bestimmen Sie eine Dichtefunktion f^X von X .

Aufgabe W11

Der Betreiber eines Getränkestands auf einem alljährlich stattfindenden Frühjahrsfest setzt morgens 200l Bowle an, die er in 0.2l-Bechern verkauft. Aus langjähriger Erfahrung weiß er, dass die Anzahl der Bowle-Becher, die ein Kunde an seinem Stand trinkt, als (diskrete) Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 2.6$ und Varianz $\sigma^2 = 3$ aufgefasst werden kann. („Im Mittel“ sollte der Vorrat also für $1000/2.6 \approx 384$ Personen reichen.) Außerdem kann angenommen werden, dass die Kunden unabhängig voneinander die Bowle-Becher bestellen.

- (i) Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Vorrat sogar für 420 Personen ausreicht?
- (ii) Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Vorrat für (nur) 350 Personen *nicht* ausreicht?

Aufgabe W12

Ein renommiertes Eisgeschäft untersucht die Beliebtheit von fünf neu kreierten Eissorten bei seinen Kunden, um zu entscheiden, welche der neuen Eissorten in Zukunft angeboten werden soll. Dazu werden 100 Stammkunden gebeten, die fünf neuen Eissorten zu kosten und jeweils anzugeben, welche Eissorte ihnen am besten schmeckt.

Die folgende Urliste gibt die Ergebnisse der Befragung an:

$E, M, C, C, M, P, C, C, M, P, P, T, T, M, P, T, E, P, E, P,$
 $E, P, E, C, M, C, P, M, M, C, P, E, P, M, C, P, E, T, T, P,$
 $E, P, E, C, M, C, T, T, M, C, C, T, P, M, P, C, E, E, M, P,$
 $E, T, P, C, M, C, P, P, T, C, P, E, T, T, P, P, E, E, T, P,$
 $E, M, T, C, M, C, P, E, C, C, P, E, P, T, P, P, E, P, E, P.$

Hierbei steht C für „Chili-Mandel“, E für „Erdnuss-Honig“, M für „Milchreis-Zimt“, P für „Pfefferminz-Pflaume“ und T für „Trauben-Anis“.

- (a) Erstellen Sie zu den benannten Eissorten eine Tabelle, die sowohl die zugehörigen absoluten als auch die zugehörigen relativen Häufigkeiten enthält.
- (b) Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung der genannten Eissorten mittels eines Stabdiagramms dar. Wählen Sie hierbei den Maßstab für die vertikale Achse so, dass die Höhe des größten Stabes in der graphischen Darstellung 15 cm beträgt.

Aufgabe W13

10 Personen wurden gefragt, wie viele Stunden sie täglich ihr Smartphone nutzen. Die angegebenen Nutzungsdauern betragen

$$5, 0.5, 7, 3, 1, 3, 2, 6, 5, 13.$$

Zu diesen Angaben wird folgende Klasseneinteilung betrachtet:

$$K_1 = [0, 1], \quad K_2 = (1, 3], \quad K_3 = (3, 7], \quad K_4 = (7, 14].$$

Erstellen Sie zu dieser Klasseneinteilung ein Histogramm.

Aufgabe W14

Im Auftrag eines Autoherstellers wurden 20 Kunden danach gefragt, nach wie vielen gefahrenen Kilometern zum ersten Mal eine Panne am Fahrzeug aufgetreten ist. Dabei wurden folgende Angaben (in tausend Kilometern) ermittelt:

$$10, 50, 100, 15, 60, 90, 150, 80, 100, 55, 70, 80, 12, 130, 70, 65, 85, 40, 12, 100$$

- Berechnen Sie das zugehörige arithmetische Mittel sowie die zugehörigen p -Quantile für $p \in \{0.5, 0.25, 0.75, 0.99\}$.
- Berechnen Sie die empirische Varianz des gegebenen Datensatzes.
- Der Hersteller stellt den 20 Kunden nach der Befragung Tankgutscheine über eine bestimmte Benzinmenge aus. Für je 100 vor der ersten Panne gefahrene Kilometer werden 0.2 Liter gutgeschrieben. Geben Sie die Ordnungsstatistik für die resultierenden Höhen (in Litern) der Gutscheine an.

Falls ein Quantil nicht eindeutig bestimmt ist, so ist die Intervallmitte der Kandidaten anzugeben.

Aufgabe W15

Gegeben sei der Datensatz y_1, \dots, y_n , der aus x_1, \dots, x_n durch Anwendung der affin-linearen Transformation $x \mapsto y = -4x + 0.3$ hervorgeht, d.h. es gilt:

$$y_i = -4x_i + 0.3, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Der Datensatz x_1, \dots, x_n habe den Median $\tilde{x}_{0.5} = 10.5$, das arithmetische Mittel $\bar{x} = 11$ und die empirische Varianz $s_x^2 = 3$. Berechnen Sie für den transformierten Datensatz y_1, \dots, y_n den Median, das arithmetische Mittel und die empirische Varianz.

Aufgabe W16

Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} f_\beta$, wobei die Dichtefunktion $f_\beta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$f_\beta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{1+x} \right)^{1+1/\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

mit einem Parameter $\beta > 0$. Bestimmen Sie den Maximum - Likelihood - Schätzer für β .

Aufgabe W17

In der Produktion von Eisenbahn-Waggons werden zur Durchführung von Bohrungen an Stahlträgern zwei unterschiedliche Bohrstationen B_1 und B_2 verwendet. Anhand eines geeigneten statistischen Tests soll überprüft werden, ob sich die für die Bohrvorgänge benötigten Zeiten an beiden Stationen signifikant unterscheiden.

Hierzu wurden 13 Bohrungen mit der Bohrstation B_1 und 11 Bohrungen mit der Bohrstation B_2 durchgeführt. Es ergaben sich folgende Zeiten für die Bohrvorgänge (in s):

| | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Bohrstation B_1 | 67.5 | 59.0 | 51.2 | 61.1 | 51.7 | 55.9 | 55.2 | 55.6 | 54.4 | 60.2 | 61.8 | 60.7 | 68.1 |
| Bohrstation B_2 | 61.8 | 77.7 | 66.7 | 59.6 | 70.8 | 69.5 | 66.4 | 61.1 | 62.9 | 68.5 | 75.2 | | |

Nehmen Sie an, dass diese Zeiten als Realisationen stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{13} , Y_1, \dots, Y_{11} mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ für $i \in \{1, \dots, 13\}$ und $j \in \{1, \dots, 11\}$ aufgefasst werden können, wobei $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ jeweils unbekannt seien. Überprüfen Sie mittels eines geeigneten statistischen Tests zum Niveau $\alpha = 10\%$, ob sich die beiden Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 signifikant unterscheiden.