Siebformel (I)

Wir hatten schon die Formel:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Gibt es solch eine Formel auch für 3 Ereignisse, also für $P(A \cup B \cup C)$?

Siebformel (I)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Siebformel (I)

Siebformel (II)

Siebformel (II)

Ganz allgemein: $A_1, A_2, \ldots$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\ + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \mp \cdots + \\ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned}$$

Hinweis: Dies ist ein klassischer Induktionsbeweis.

Ereignis-Algebra

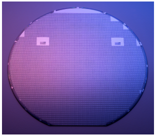
Beispiel

Ergebnismenge für...

1. *zufälligen Gewinn eines Unternehmens:* $\Omega = \mathbb{R}$.
2. *zufälligen Zeitpunkt, an dem die Serverlast zum ersten Mal die Schranke c übersteigt:* $\Omega = [0, \infty)$.

Grundlegender Unterschied:
$\to$ Ω 'sehr groß' (es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen in jedem nichtleeren Intervall).
$\to$ Es gibt zu viele Teilmengen, so dass man nicht alle als Ereignisse zulassen kann. Ansonsten kein vernünftiger Wahrscheinlichkeitskalkül.
$\to$ Andere Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten (Dichten, Verteilungsfunktionen, später...).

Wafer-Herstellung



- Modelliere Wafer durch Oberfläche Ω
- Staubpartikel landet zufällig an der Stelle $\omega \in \Omega$: CPU defekt.
- (Kleine) Teilfläche $A \subset \Omega$ nutzlos, wenn $\omega \in A$.
- Staubpartikel trifft an einer zufälligen Stelle auf den Wafer. Plausibles Modell:

  $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

  mit $|A| =$ Fläche von A.

Ereignisalgebra

Ereignisalgebra, σ-Algebra

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \text{Pot}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω heißt **Ereignisalgebra (σ-Algebra)**, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

1. Die Ergebnismenge Ω und die leere Menge $\emptyset$ gehören zu $\mathcal{A}$.
2. Mit A ist auch $\overline{A}$ Element von $\mathcal{A}$.
3. Sind $A_1, A_2, \ldots$ Mengen aus $\mathcal{A}$, dann ist auch $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ ein Element von $\mathcal{A}$.

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen **Ereignisse**.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Motivation

Wie wahrscheinlich ist es, dass die Übertragung der Buchungsdaten aus Hongkong nicht länger als 20 [s] dauert,...

1. wenn die Übertragung zufällig startet.
2. wenn wir wissen: Die Übertragung erfolgt vormittags.

Frage:

Wie wahrscheinlich ist A gegeben die Information B.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Expertensystem zur Fehleridentifikation.

Fehlerursachen A führen zu Symptomen B: $A \to B$

Zufallsbehaftete Fehlerursachen $A_1, \ldots, A_K$ (unbeobachtet)

Symptom B (beobachtet)

Beispiel:

Ursachen A_i: Ausfall Bauteil, Kabelbruch, Überspannung, korrodierter Stecker, Überhitzung

Symptome B: Systemausfall, Displayfehler, langsame Datenübertragung, kein WLAN

<u>Relevant:</u> Wie wahrscheinlich ist A_i, <u>wenn</u> B beobachtet wurde?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Aktienindizes steigen oder fallen zufallsbehaftet. Sie sind beeinflusst von Zinsen.

Daten: 2000 Beobachtungen von Zins und Aktienindex

	Zins fällt (B)	Zins steigt	Summe
Aktienindex fällt (A)	250	950	1200
Aktienindex steigt	750	50	800
Summe	1000	1000	2000

Ablesebeispiel: 250 mal sind Aktienindex und Zins gefallen.

In $\frac{1200}{2000} = 60\%$ der Fälle ist der Aktienindex gesunken.

Relevant: Vorinformation Zins fällt/steigt bekannt.

Wie oft ist der Aktienindex gesunken, wenn der Zins steigt?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Es seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse mit $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A **gegeben** B. Liegt speziell ein Laplace-Raum vor, dann ist $P(A|B)$ der Anteil der für das Ereignis $A \cap B$ günstigen Fälle, bezogen auf die möglichen Fälle, welche die Menge B bilden:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \frac{|\Omega|}{|B|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Aktienindizes steigen oder fallen zufallsbehaftet. Sie sind beeinflusst von Zinsen.

Daten: 2000 Beobachtungen von Zins und Aktienindex

	Zins fällt	Zins steigt (B)	Summe
Aktienindex fällt (A)	250	950	1200
Aktienindex steigt	750	50	800
Summe	1000	1000	2000

Wahrscheinlichkeit, dass A und B gemeinsam eintreten:

$$P(A \cap B) =$$

Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt:

$$P(B) =$$

Wahrscheinlichkeit von A gegeben B (ist eingetreten):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Rechenregel:

A, B seien Ereignisse mit $P(B) > 0$. Dann gilt:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Drei Ereignisse A, B, C. Gesucht: Wkeit von C gegeben A und B.
Bedinge auf das Ereignis $A \cap B$ (sofern $P(A \cap B) > 0$):

$$P(C|A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$$

Umstellen:

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(A \cap B)$$

Einsetzen von $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$ (sofern $P(A) > 0$):

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A)$$

Beispiel

Beispiel

Ereignisse:

$$A = \text{„Server nicht überlastet"}, \quad B = \text{„Server antwortet spätestens nach 5 [s]"}, \quad C = \text{„Download dauert nicht länger als 20 [s]"}.$$

Gesucht: $P(A \cap B \cap C)$.
Gegeben:

1. *Server nicht überlastet mit Wkeit* 0.1.
2. *Wenn Server nicht überlastet, dann Antwort nach spätestens 5 [s] mit Wkeit 0.95.*
3. *In diesem Fall dauert der Download in 8 von 10 Fällen nicht länger als 20 [s].*

Lösung: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = 0.1 \cdot 0.95 \cdot 0.8 = 0.076$

Rechenregel

Regel

Sind $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse mit $P(A \cap B \cap C) > 0$, dann ist

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A).$$

Sind allgemeiner $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse mit $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, dann gilt:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Motivation

Ein Spam-Filter verschiebt E-Mails in den junk-Ordner, wenn gewisse Worte in der E-Mail vorhanden sind, z.B. *win*.
Durch Analysieren von alten E-Mails kann man die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Form

$$P(\text{,,E-Mail enthält } \textit{Uni}\text{''} \mid \text{,,Email ist Spam''})$$

etc. gut schätzen.
Fragen:

1. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine E-Mail Spam ist?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine E-Mail tatsächlich Spam ist, wenn das Wort *win* vorkommt?

Spam-Filter

Systematisch: Ereignisse definieren:

$$\begin{aligned} A &= \text{„E-Mail ist Spam“}, \\ B_1 &= \text{„E-Mail enthält das Wort } \textit{Uni}\text{“}, \\ B_2 &= \text{„E-Mail enthält das Wort } \textit{win}\text{“}. \end{aligned}$$

Bekannt seien: $P(A), P(B_1|A), P(B_1|\overline{A}), P(B_2|A)$ und $P(B_2|\overline{A})$.

1. Kann man hieraus
$$P(B_i), \qquad i = 1, 2$$
berechnen?
2. Kann man hieraus
$$P(A|B_i)$$
berechnen?

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Es sei $A_1, \ldots, A_K$ eine disjunkte Zerlegung von Ω:

$$\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_K, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j.$$

Dann gilt:

$$P(B) \;=\; P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_K)P(A_K).$$

In Summenschreibweise:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{K} P(B|A_i)P(A_i).$$

Diese Formel gilt auch sinngemäß für $K = \infty$.

Satz von Bayes

Satz von Bayes

$A_1, \ldots, A_K$ sei eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $P(A_i) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, K$. Dann gilt für jedes Ereignis B mit $P(B) > 0$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{K} P(B|A_k)P(A_k)}.$$

Diese Formel gilt sinngemäß auch für den Fall $K = \infty$.