Zufallsvariablen und ihre Verteilung

Oftmals interessiert nicht $\omega \in \Omega$ (zu fein), sondern

$$x = X(\omega),$$

wobei X eine Abbildung (=Algorithmus) ist: Informationsverdichtung.

Zufallsvariable

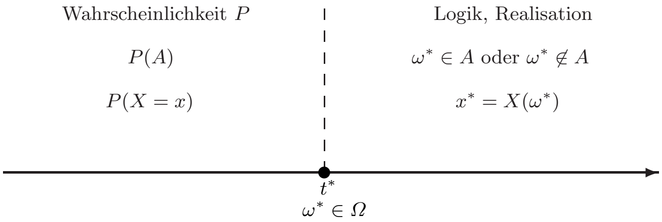
Eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}, \qquad \omega \mapsto X(\omega),$$

Ω abzählbar, in die reellen Zahlen heißt **Zufallsvariable (mit Werten in $\mathcal{X}$)**.
$x = X(\omega)$: **Realisation**.
Zusatz: Allgemeines Ω: X muss **messbar** sein:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A} \qquad \text{für alle Ereignisse } B \text{ von } \mathcal{X}.$$

Zufallsvariablen und ihre Verteilung



Diskrete Zufallsvariablen

Ein wichtiger Spezialfall:

Diskrete Zufallsvariable

X heißt **diskrete Zufallsvariable**, wenn

$$\mathcal{X} = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$$

eine diskrete Menge (endlich oder abzählbar) ist.

Notiz: Ω diskret $\Rightarrow$ Alle ZV sind diskret.

Verteilung einer Zufallsvariablen

Motivation: Glücksspiel-Programm

- Wähle zufällig eine Zahl zwischen 1 und 100.
- Auszahlung:
  - 0 EUR, falls die Zahl kleiner oder gleich 90 ist.
  - 1 EUR, falls die Zahl größer als 90 und kleiner als 100 ist.
  - 2 EUR bei einer 100.

Bestimme die ,,Gewinnverteilung".

Lösung: Der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum ist gegeben durch (Ω, P), mit der Ergebnismenge

$$\Omega = \{\omega : \omega \in \{1, \dots, 100\}\} = \{1, \dots, 100\}$$

und dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P : Pot(\Omega) \to [0, 1]$,

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{100}, \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

Der Gewinn $X : \Omega \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, ist eine Abbildung (genauer: Funktion) mit Werten in $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ gegeben durch die folgende Tabelle:

ω	$1, \dots, 90$	$91, \dots, 99$	100
$x = X(\omega)$	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{90}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{100}$

Es gilt:

$$P(X = 1) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\}) = P(\{91, \dots, 99\}) = \frac{9}{100}$$
$$P(X = 0) =$$
$$P(X = 2) =$$

Hierdurch ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ definiert.

Verteilung einer Zufallsvariablen

Sei $A \subset \mathcal{X}$ ein Ereignis.
Das Ereignis, dass sich X in A realisiert, also

$$\{X \in A\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\},$$

tritt mit Wkeit

$$P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

ein. Betrachte dies als Funktion von A.

Verteilung einer Zufallsvariablen

Verteilung von X

Die Zuordnung, die jedem Ereignis A die Wkeit $P(X \in A)$ zuordnet, heißt **Verteilung von** X.Formal:

$$P_X : A \mapsto P_X(A) = P(X \in A),$$

für Ereignisse $A \subset \mathcal{X}$.

Hinweis: Unterscheide P, das W-Maß auf Ω, und P_X, das W-Maß auf $\mathcal{X}$.

Verteilung einer Zufallsvariablen

Nach Einführung von X interessiert primär die Verteilung von X
Relevant:

- Punktförmige Ereignisse $\{x\}$, $x \in \mathcal{X}$.

$$P_X(\{x\}) = P(X = x)$$

- intervallförmige Ereignisse: $(a, b]$, $a \leq b$

$$P_X((a, b]) = P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b).$$

Berechnung von $P(a < X \leq b)$:
Da $(-\infty, b]$ disjunkt in die Intervalle $(-\infty, a]$ und $(a, b]$ zerlegt werden kann, gilt:

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b).$$

Umstellen liefert:

Für die Berechnung von Intervallwahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a).$$

Verteilung einer Zufallsvariablen

Beispiel

Für den zufallsbehafteten Gewinn X des nächsten Quartals gelte

- $P(X < 20000) = 0.2$
- $P(X = 20000) = 0.01$
- $P(X \leq 80000) = 0.9$
- $P(X > 100000) = 0$

Berechnen Sie $P(20000 < X \leq 80000)$.

Hinweis: $P(20000 < X \leq 80000) = P(X \leq 80000) - P(X \leq 20000)$
mit

$$P(X \leq 20000) = P(X < 20000) + P(X = 20000) = \ldots$$

Nun Einsetzen...

Verteilung von diskreten Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

X sei diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion

$$p_X(x) = P(X = x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion oder **Zähldichte** von X. Es gilt:

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1.$$

Sie bestimmt eindeutig die Verteilung von X.

Verteilung von diskreten Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen (Fs.)

Die Zähldichte kann durch die Punktwahrscheinlichkeiten

$$p_i = P(X = x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

festgelegt werden: Es gilt $p_X(x_i) = p_i$ und $p_X(x) = 0$, wenn $x \notin \mathcal{X}$. Kann X nur endlich viele Werte $x_1, \ldots, x_k$ annehmen, dann heißt $(p_1, \ldots, p_k)$ auch **Wahrscheinlichkeitsvektor**.

Beispiel

Erinnerung: Glücksspiel-Programm

- Wähle zufällig eine Zahl zwischen 1 und 100.
- Auszahlung:
  - 0 EUR, falls die Zahl kleiner oder gleich 90 ist.
  - 1 EUR, falls die Zahl größer als 90 und kleiner als 100 ist.
  - 2 EUR bei einer 100.

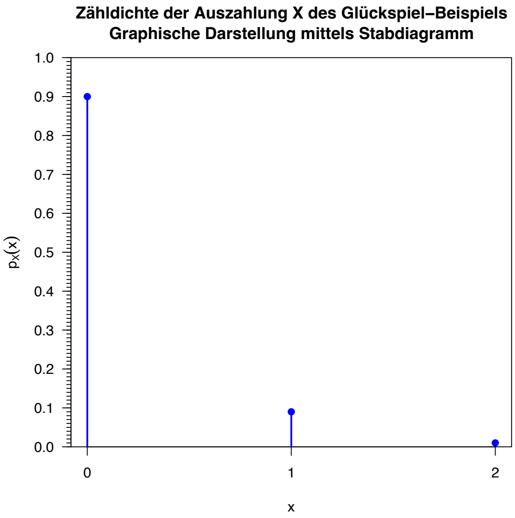
Verteilung des Gewinns X (Tabelle):

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{90}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{100}$

Zähldichte:

$$p(x) = \begin{cases} 0.9, & x = 0, \\ 0.09, & x = 1, \\ 0.01 & x = 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele: Diskrete Zufallsvariablen



Beispiele: Diskrete Zufallsvariablen

Beispiele: 1) Überprüfen Sie, ob durch

$$p(x) = \begin{cases} 0.1, & x = -1, \\ 0.8, & x = 0, \\ 0.1, & x = 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Zähldichte gegeben ist.

2) Die Zähldichte von X sei gegeben durch

$$p_X(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \qquad x \in \mathbb{N},$$

für ein $p \in [0,1]$. Für $x \notin \mathbb{N}$ ist $p_X(x) = 0$. Verifiziere, dass hierdurch tatsächlich eine Zähldichte auf $\mathbb{N}$ gegeben ist und leite die Verteilungsfunktion her.

Verteilungsfunktion

Die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F_X(x) = P(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

heißt **Verteilungsfunktion von** X. $F_X(x)$ ist monoton wachsend, rechtsstetig und es gilt:

$$F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \qquad F(\infty) := \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1.$$

Ferner gilt: $P(X < x) = F(x-) = \lim_{z \uparrow x} F(z)$ und

$$P(X = x) = F(x) - F(x-).$$

Allgemein heißt jede monoton wachsende und rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$ **Verteilungsfunktion (auf $\mathbb{R}$)** und besitzt obige Eigenschaften.

Beispiel: Die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

ist eine Verteilungsfunktion, da sie die folgenden Eigenschaften hat:
(1) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Denn: $0 \leq e^{-x} \leq 1$, $x \geq 0$. *Daher gilt* $F(x) = 1 - e^{-x} \in [0,1]$ *und somit* $F(x) \geq 0$ *für alle* $x \geq 0$.

Ferner gilt $F(x) = 0 \geq 0$ *für alle* $x < 0$ *nach Definition von* $F(x)$.

(2) $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$
(3) $F(\infty) = 1$:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{0\leq x\to\infty} (1 - e^{-x}) = 1 - \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 1 - 0 = 1$$

(4) $F(x)$ ist konstant für $x \leq 0$ und streng monton wachsend für $x > 0$:

$$F'(x) = (1 - e^{-x})' = 0 - \frac{d}{dx} e^{-x} = -(-e^{-x}) = e^{-x} > 0$$

Beispiel: Sind $x_1, \ldots, x_n$ reelle Daten (Zahlen, genannt: Stichprobe), dann heißt die Funktion

$$F_n(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(x_i \leq x) = \text{,,Anteil der Daten } \leq x\text{''}$$

empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$.
(Machen Sie sich eine Zeichnung für $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 4$!)

- $F_n(x)$ ist eine Verteilungsfunktion im Sinne der obigen Definition.
- Sind $y_1, \ldots, y_n$ die sortierten x-Werte, dann ist $F_n(x)$ konstant auf den Intervallen $(-\infty, y_1), [y_1, y_2), [y_2, y_3), \ldots, [y_{n-1}, y_n), [y_n, \infty)$ mit Funktionswerten $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$.
- $F_n(x)$ springt an den beobachteten Werten. Die Sprunghöhe ist jeweils der Anteil der jeweiligen Beobachtung in der Stichprobe.

Beispiele: Diskrete Zufallsvariablen

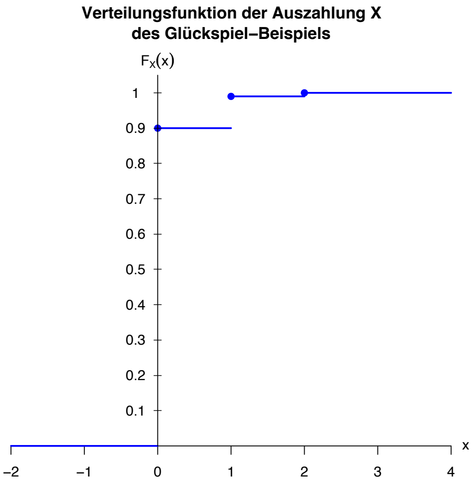
Zähldichte $p(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p(x) = \begin{cases} 0.9, & x = 0, \\ 0.09, & x = 1, \\ 0.01 & x = 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion: (addiere die Zähldichte sukzessive auf...)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.9, & 0 \leq x < 1, \\ 0.99, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

Beispiele: Diskrete Zufallsvariablen



Beispiel:
Für die Zufallsvariable $X : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$ gelte

$$P(X=1)=0.1, \quad P(X=2)=0.5, \quad P(X=3)=0.4.$$

Angabe der Verteilung durch die *Verteilungsfunktion*:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0.1, & 1 \leq x < 2, \\ 0.6, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Sprunghöhen: $0.1, 0.5, 0.4$. Dies sind gerade die Werte der Zähldichte!
Die Sprungstellen sind die x-Werte, an denen die Zähldichte positiv ist.
Also ist die *Zähldichte*:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.1, & x = 1, \\ 0.5, & x = 2, \\ 0.4, & x = 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Quantilfunktion

Quantilfunktion

$F(x)$ sei eine Verteilungsfunktion.
Die Funktion $F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$F^{-1}(p) = min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}, \qquad p \in (0,1),$$

heißt **Quantilfunktion von** F.

Ist $F(x)$ stetig und streng monoton wachsend, dann ist $F^{-1}(p)$ die Umkehrfunktion von $F(x)$.

Für ein festes p heißt $F^{-1}(p)$ **(theoretisches)** p-**Quantil**.

Anschauliche Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten
(Idee: Funktion bestimmt (Intervall-) Wahrscheinlichkeit)

Stetige Zufallsvariable, Dichtefunktion

Eine ZV X heißt **stetig (verteilt)**, wenn es eine integrierbare, nicht-negative Funktion $f(x)$ gibt, so dass für alle Intervalle $(a, b] \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$P_X((a, b]) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$f_X(x) = f(x)$ heißt dann **Dichtefunktion von** X (kurz: Dichte).
Allgemein heißt jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Dichtefunktion.

Punktwahrscheinlichkeiten sind immer 0:

$$P(X = x) = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\, dt = 0$$

Aufweichen: $P(„X \approx x") = P(X \in [x - \Delta x, x + \Delta x])$

$$\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(x)\, dx \approx 2\Delta x \cdot f(x)$$

(Das Integral über kleine Intervalle ist näherungsweise die Recheckfläche).
Also: $P(„X \approx x")$ ist proportional zu $f(x)$.
($f(x)$: infinitesimale Wkeit bei x pro x-Einheit).

Notation: X hat Dichte $f_X(x)$:

$$X \sim f_X$$

Verteilungsfunktion aus Dichte:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dichte aus Verteilungsfunktion:

$$f_X(x) = F_X'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechung:
Besitzt die Funktion F auf dem Intervall $[a, b]$ eine stetige (es reicht: Riemann-integrierbare) Ableitung, so ist

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)\,dx$$

und somit

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(F ist Stammfunktion des Integranden $f(x) := F'(x)$.)

Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechung:
Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion auf $[a, b]$, z.B.:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

Man kann diese Ergebnisse auch anwenden, wenn die Voraussetzungen auf einzelnen Intervallen gegeben sind.

Beispiel: Stetige Zufallsvariablen

Beispiel

- *Dichtefunktionen*
- *Dichte - Vf. - Quantilfunktion*

Beispiel: Exponentialverteilung

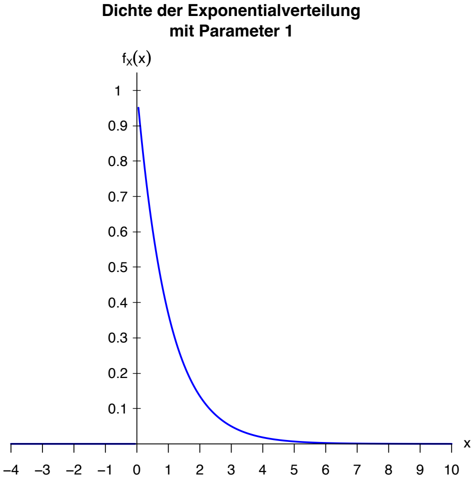
Beispiel: Wir hatten geprüft, dass

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

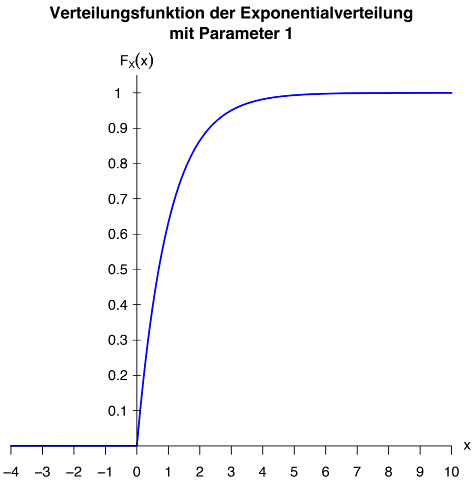
eine auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ differenzierbare Verteilungsfunktion ist. Die zugehörige Dichte ist gegeben durch 0 auf $(-\infty, 0]$ und durch e^{-x} auf $(0, \infty)$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Beispiel: Stetige Zufallsvariablen



Beispiel: Stetige Zufallsvariablen



Beispiel: Stetige Zufallsvariablen