Varianz, Standardabweichung

Varianz

Sei X eine Zufallsvariable. Dann heißt

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$$

Varianz von X, sofern $E(X^2) < \infty$. Die Wurzel aus der Varianz,

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)},$$

heißt **Standardabweichung von** X.

Erlaubte Schreibweisen: Mit $\mu = E(X) = EX$.
$\mathrm{Var}(X) = E\big((X - \mu)^2\big) = E(X - \mu)^2$
(Tipp: Lieber mehr Klammern und $E(X)$ sowie $E((X - \mu)^2)$ schreiben!)

Verschiebungssatz

Verschiebungssatz

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Varianz: Rechenregeln

Rechenregeln

X, Y Zufallsvariablen mit existierenden Varianzen und $a \in \mathbb{R}$.

1. $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$.
2. Falls $E(X) = 0$, dann gilt: $\text{Var}(X) = E(X^2)$.
3. Sind X und Y stochastisch unabhängig, dann gilt:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Erwartungswert und Varianz: Beispiele

Erwartungswert und Varianz: Beispiele

Erwartungswert: Transformationsformel

Transformationssatz

X ZV und $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Funktion mit $E|g(X)| < \infty$.
Sei $Y = g(X)$.
Zusammenhang zwischen $E(g(X))$ und $E(Y)$:

1. Sind X und $Y = g(X)$ diskrete Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_X(x)$ bzw. $p_Y(y)$, dann gilt:

$$E(Y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) p_X(x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \cdot p_Y(y).$$

2. Sind X und $Y = g(X)$ stetig, mit den Dichtefunktionen $f_X(x)$ bzw. $f_Y(y)$, dann gilt:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) \, dy.$$

Momente, Kurtosis, Exzess

Sei X Zufallsvariable und $k \in \mathbb{N}$. Gelte $E(|X^k|) < \infty$.

- $m_k = E(X^k)$ ist das k-**te Moment** von X.
- $m_k^* = E(|X|^k)$ ist das k-**te absolute Moment** von X.
- $m_k(a) = E(X-a)^k$ ist das k-**te Moment um** a.
- $m_k^*(a) = E(|X-a|^k)$ ist das k-**te absolute Moment um** a. Für

$a = E(X)$ spricht man vom k-**ten zentralen absoluten Moment**.

Beachte:

a) $E(X) = m_1$ ist das erste Moment von X.

b) $\mathrm{Var}(X) = m_2^*(E(X))$ ist das zweite zentrale absolute Moment.

c) $X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$ heißt Standardisierung von X: $E(X^*) = 0$, $\mathrm{Var}(X^*) = 1$.

d) $\beta_2 = E((X^*)^4)$ heißt Kurtosis von X (misst Wölbung).

e) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \beta_2 = 3$.

f) $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ heißt Exzess. $\gamma_2 > 0$: Verteilung 'spitzer' als Gaussverteilung, $\gamma_2 < 0$: 'flacher'.

Standard-Verteilungsmodelle

- Anzahl von Erfolgen (ja/nein, gut/schlecht,...) bei n Wiederholungen (Versuchen).
- Wartezeit auf den ersten Erfolg.
- Anzahl von Ereignissen in einem (Zeit-) Intervall.
- Wartezeit auf das erste Eintreten.
- Stetige Gleichverteilung.
- Normalverteilung

Bernoulli-Verteilung

Bernoulli-Experiment

A ein Ereignis. Beobachte, ob A eintritt oder nicht:

$$X = \mathbf{1}_A = \begin{cases} 1, & A \text{ tritt ein} \\ 0, & A \text{ tritt nicht ein.} \end{cases}$$

Träger: $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ (binär). Verteilung gegeben durch

$$p = P(X = 1) = P(A), \qquad q = 1 - p = P(X = 0)$$

p: Erfolgswahrscheinlichkeit.

$$X \sim \text{Ber}(p), \qquad X \sim \text{Bin}(1, p)$$

$$\text{Erwartungswert:} \quad E(X) = p,$$
$$\text{Varianz:} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p),$$

Binomialverteilung (I)

Beispiele

- Anzahl der gesetzten Bits in einer zufälligen Bitfolge der Länge n.

  0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 -> 6
- Umfrage unter n Studierenden: Zähle aus, wieviele mit der Mensa zufrieden sind.
- Anzahl der blauen Autos auf einem Parkplatz.
- Anzahl der erfolgreichen Geschäftsabschlüsse eines Vertreters.
- Anzahl von Überschreitungen einer Benchmark durch ein Aktienkurs
- ...

Binomialverteilung (II)

Binomialverteilung

- Modell: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \text{Ber}(p)$.
- Anzahl der Erfolge gegeben durch:

$$Y = X_1 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Wie ist Y verteilt?

Binomialverteilung (III)

Gesucht: $P(Y = k), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$

- Das Ereignis $\{Y = k\}$ tritt genau dann ein, wenn exakt k Einsen beobachtet werden.
- Beispiele: a) $k = 2, n = 3$; b) $k = 2, n = 4$; c) $k = 4, n = 8$:

```
a)            b)                      c)
1 1 0       1 1 0 0       1 1 1 1 0 0 0 0
1 0 1       1 0 1 0       1 1 1 0 1 0 0 0
0 1 1       1 0 0 1       1 1 1 0 0 1 0 0
            0 1 1 0              ...
            0 1 0 1
            0 0 1 1       0 0 0 0 1 1 1 1

3              6                 28
```

Binomialverteilung (III)

Gesucht: $P(Y = k), \quad k = 0, 1, \dots, n$.

- Das Ereignis $\{Y = k\}$ tritt genau dann ein, wenn exakt k Einsen beobachtet werden.
- Beispiele: $k = 2$ und $n = 3, n = 4$ sowie $k = 4, n = 8$:

  1 1 0   1 1 0 0   1 1 1 1 0 0 0 0
- Jede Kombination mit k Einsen hat Wkeit $p^k(1-p)^{n-k}$, denn

$$\begin{aligned} P('11110000') &= P(X_1 = 1, \dots, X_4 = 1, X_5 = 0, \dots, X_8 = 0) \\ &= p^4(1-p)^4, \dots \end{aligned}$$

- Wieviele verschiedene Muster gibt es?
  Muster: k Positionen auswählen und eine '1' hinschreiben.

Binomialkoeffizient

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ gibt der **Binomialkoeffizient**

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \ldots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer n-elementigen Obermenge (aus n Objekten) eine k-elementige Teilmenge (k Objekte ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen.

Binomialkoeffizienten

Beispiel:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{120}{6} = 20.$$

Regel von Pascal:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

für $k = 1, \ldots, n$ und $n \geq 1$, wobei $\binom{m}{m} = 1 = \binom{m}{0}$ für $m \geq 0$.

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 = \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

Binomialkoeffizient

Binomialverteilung

Y heißt binomialverteilt, $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, wenn

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

$$\begin{aligned}
\text{Erwartungswert:} \quad & E(Y) = np, \\
\text{Varianz:} \quad & \mathrm{Var}(Y) = np(1-p), \\
\text{Zähldichte:} \quad & p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \;\; k \in \{0, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

Binomialverteilung: Faltung

Eigenschaft

$X \sim \text{Bin}(n_1, p)$ und $Y \sim \text{Bin}(n_2, p)$ unabhängig, dann folgt:
$X + Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$.

Urnenmodell III

Urnenmodell III: Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen

- Urne mit n Kugeln mit Nummern 1 bis n
- Ziehe k Kugeln ohne Zurücklegen.

In Reihenfolge: $\rightarrow$ k-Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ mit Einträgen $\omega_i \in \{1, \dots, n\}$, wobei zusätzlich gilt:

$$\omega_i \neq \omega_j, \qquad i \neq j,$$

Anzahl: $n_k = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Jetzt: Ohne Reihenfolge.
Fasse $\omega_1, \dots, \omega_k$ so zusammen, dass die Anordnung keine Rolle spielt:

$$\rightarrow \text{Mengen}$$

Urnenmodell III

Ergebnismenge:

$$\Omega_{III} = \{\{\omega_1, \ldots, \omega_k\} : \omega_1, \ldots, \omega_k \in \{1, \ldots, n\}, \omega_i \neq \omega_k, (i \neq j)\}.$$

Wieviele k-Tupel werden auf diese Weise derselben Menge zugeordnet?
$\rightarrow$ Genau $k!$ Tupel, da jede Permutation der k Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_k$ zu derselben Menge führt.
Also hat Ω nicht $\frac{n!}{(n-k)!}$ Elemente, sondern nur

$$|\Omega_{III}| = \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Urnenmodell IV

Urnenmodell IV: Ziehen ohne Reihenfolge und mit Zurücklegen

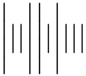
- Urne mit N Kugeln mit Nummern 1 bis N
- Ziehe n Kugeln ohne Reihenfolge und mit Zurücklegen $\rightarrow$ Mehrfachziehungen möglich

Ergebnismenge: Stelle die Ziehungen als sortierte Tupel dar.

$$\Omega_{IV} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \ldots, N\}, i = 1, \ldots, n, \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_n\}.$$

Alltag: Strichliste

- Grenze N Felder für die Zahlen $1, \ldots, N$ durch $N-1$ große Striche ab.
- Markiere die gezogenen Kugeln durch kleine Striche in den Feldern.



Jede Stichprobe ist durch $N-1$ große und n kleine Striche charakterisiert. $\rightarrow$ $N-1+n$ Objekte. Es gibt genau $\binom{N-1+n}{n}$ Möglichkeiten, von diesen n auszuwählen und als kleine Striche festzulegen. Die anderen $N-1$ werden die großen Striche. Daher folgt:

$$|\Omega_{IV}| = \binom{N-1+n}{n}$$

Hypergeometrische Verteilung

Problem: Lieferung von N CPUs für Computerproduktion. Ziehe zufällig n aus und teste auf gut/schlecht.

Frage: Wie ist der Anteil X der schlechten Teile in der Stichprobe verteilt?

$\rightarrow$ Urnenmodell III mit $N = R + B$, R: rote Kugeln (schlechte CPUs), B: blaue Kugeln (gute CPUs). (Rot: $K_R = \{1, ..., R\}$. Blau: $\{R+1, \dots, N\}$).

Anteil der roten Kugeln in der Urne: $p = \frac{R}{N}$.

Stichprobe vom Umfang $n = r + b$, r: gezogene rote, b: gezogene blaue Kugeln. Ereignis, genau r rote Kugeln zu ziehen: Mit $K_R = \{1, \dots, R\}$:
$A_r = \{\omega \in \Omega : \exists I = \{i_1, \dots, i_r\} : \omega_{i_j} \in K_R, 1 \le j \le r, \omega_k \notin K_R, \forall k \in I^c\}$

$$P(X = r) = P(A_r) = \frac{\binom{R}{r}\binom{B}{n-r}}{\binom{N}{n}}, \qquad \max(0, n - B) \le r \le \min(R, n)$$

X heiß **hypergeometrisch** verteilt mit Par. N, R, B, n.

Fragestellungen aus der Praxis:
Eine Software wird täglich mit neuen zufälligen Input-Daten eingesetzt. Bei einer Fließbandfertigung (z.B. Autoproduktion) wird jedes Produkt einem Endtest unterworfen.

1. Wie lange dauert es im Mittel, bis ein Fehler auftritt?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt frühestens nach 14 Tagen ein Fehler auf?

Bei Glücksspielen:

1. Wie oft muss man (im Mittel) spielen, bis man gewinnt?
2. Wie wahrscheinlich ist es, dass man mindestens 20 mal spielen muss, um 4 mal zu gewinnen?

Geometrische Verteilung

Beobachte unendliche Bernoulli-Folge (Bitfolge)

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 . . .

Frage: Verteilung des Auftretens der ersten '1'?
Modell:

$$X_1 X_2 X_3 \cdots$$

wobei

$$X_1, X_2, \ldots \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Ber}(p)$$

mit $p = P(X_i = 1)$, $i = 1, 2, \ldots$
Zufallsvariable:

$$T = \min\{k \in \mathbb{N} : X_k = 1\}$$

zufälliger Index (Zeitpunkt) der ersten '1'.
zugehörige Wartezeit ist: $W = T - 1$.

Geometrische Verteilung

Beobachte unendliche Bernoulli-Folge (Bitfolge)

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 . . .

Frage: Verteilung des Auftretens der ersten '1'?
Ereignis

$$
\begin{aligned}
\{T = 2\} &= \{X_1 = 0, X_2 = 1\} \\
\{T = 3\} &= \{X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1\} \\
&\vdots \\
\{T = n\} &= \{X_1 = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1\}
\end{aligned}
$$

$$P(T = n) = P(X_1 = 0) \cdot \dots \cdot P(X_{n-1} = 0) \cdot P(X_n = 1) = (1-p)^{n-1} p$$

Geometrische Verteilung

Geometrische Verteilung

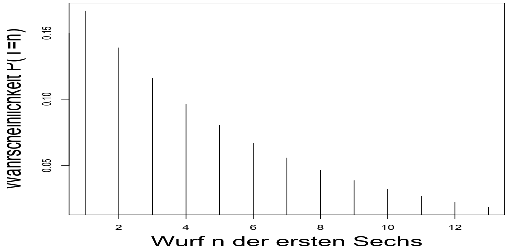
T heißt **geometrisch verteilt** mit Parameter $p \in (0,1]$. Notation: $T \sim \text{Geo}(p)$.

$$P(W = n) = p(1-p)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$
$$P(T = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\text{Erwartungswerte:} \quad E(T) = \frac{1}{p}, \qquad E(W) = \frac{1}{p} - 1,$$
$$\text{Varianzen:} \quad \text{Var}(T) = \frac{1-p}{p^2}, \qquad \text{Var}(W) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Beispiel: Nach wieviel Würfen kommt im Mittel eine 6?
T: Nummer des ersten Wurfes einer 6. $T \sim \text{Geo}(p)$.

$$E(T) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/6} = 6, \quad \sigma_T = \sqrt{\text{Var}(T)} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \sqrt{30} \approx 5.48$$



$$P(T=1) = p(1-p)^0 = \frac{1}{6} \approx 0.167, \quad P(T=2) = (1-p)p = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \approx 0.139$$

Anwendung: Negative Binomialverteilung

Negative Binomialverteilung

Die Verteilung der Summe

$$S = T_1 + \cdots + T_k$$

von k i.i.d. Geo(p)-verteilten ZVen $T_1, \ldots, T_k$ heißt **negativ binomialverteilt**. S_k ist die Anzahl der erforderlichen Versuche, um k Erfolge zu beobachten.

Poisson-Verteilung

- Eingehende Anrufe in einer Notrufzentrale.
- Anzahl der Zeitpunkte, an denen ein Aktienkurs eine Schranke passiert.
- Anzahl von Einbrüchen in einer Zeitperiode.
- Schadstellen in einer elektrischen Leitung.
- Störungen der Internetverbindung.
- Versicherungsfälle.
- Messung radioaktiver (Partikel-) Strahlung.
- ...

Benötigt: Verteilung einer Anzahl von Ereignissen,

- die unabhängig voneinander eintreten,
- deren Eintretenswahrscheinlichkeit nicht von der Zeit abhängt,
- die punktförmig/selten sind.

Poisson-Verteilung

Zähle punktförmige Ereignisse in einem Zeitintervall $[0, T]$.Indikatoren:

$$X_t = \begin{cases} 1, & \text{Ereignis zur Zeit } t, \\ 0, & \text{kein Ereignis zur Zeit } t. \end{cases}$$

Annahme: Die X_t sind unabhängig und identisch verteilt.

Anschauung: Ist $I \subset [0, T]$ ein (infinitesimal) kleines Intervall, dann hängt

$$P(\text{"Ereignis in } I\text{"}) = P(X_t = 1, \text{für ein } t \in I)$$

nur von der *Länge*, nicht jedoch von der *Lage* des Intervalls I ab.
$\rightarrow$ Wkeit p, dass ein Ereignis in $[0, T]$ eintritt proportional zu T: $p = \lambda T$

Poisson-Verteilung

Zerlege $[0, T]$ in n gleichbreite Teilintervalle.

$$X_{ni} = \begin{cases} 1, & \text{Ereignis im } i\text{-ten Teilintervall}, \\ 0, & \text{kein Ereignis im } i\text{-ten Teilintervall}, \end{cases}$$

Dann gilt: $X_{n1}, \dots, X_{nn}$ i.i.d. $\text{Bin}(1, p_n)$ mit

$$p_n = \lambda \cdot \frac{T}{n}$$

λ: Proportionalitätskonstante.
Anzahl:

$$Y = X_{n1} + \cdots + X_{nn} \sim \text{Bin}(n, p_n)$$

Poisson-Grenzwertsatz

Sind $Y_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, binomialverteilte Zufallsvariablen mit $np_n \to \lambda$, $n \to \infty$, dann gilt für festes k:

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = k) = p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Die Zahlen $p_\lambda(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, definieren eine Verteilung auf $\mathbb{N}_0$.

Y heißt **poissonverteilt** mit Parameter λ. Notation: $Y \sim \text{Poi}(\lambda)$, wenn

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Anwenden mit λT statt λ:

$$P(Y = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

(Normierung der Zeit: $T = 1$.)

Poisson-Grenzwertsatz

Verwende: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$
$$= \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{k!} (np_n)^k \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{n-k}$$

$(np_n)^k \to \lambda^k$, letzter Faktor: $\to e^{-\lambda}$. Also

$$P(Y_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \cdots$$

Die Zahlen rechts definieren eine Zähldichte (auf $\mathbb{N}_0$), da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Poisson-Verteilung

Eigenschaften

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswert:} \quad & E(Y) = \lambda, \\ \text{Varianz:} \quad & \mathrm{Var}(Y) = \lambda, \\ \text{Zähldichte:} \quad & p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \ k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Rechnen mit poissonverteilten Zufallsvariablen:

- $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$ unabhängig, dann $X + Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda + \mu)$.
- $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ die Anzahl in $[0, T]$ und Y die Anzahl im Teilintervall $[0, r \cdot T]$, so ist $Y \sim \mathrm{Poi}(r \cdot \lambda)$.

Poisson-Verteilung

Beispiel: Ein Investor beobachtet die minütlichen Aktienkursnotierungen. Y_{12} sei die Anzahl der Überschreitungen des Kursziels 100 während des 12-stündigen Handels, Y_1 während der ersten Stunde.
Y_{12} und Y_1 seien poissonverteilt. Pro Stunde wird eine Überschreitung erwartet.
Bestimmung von λ_1, λ_{12}: $\lambda_1 = E(Y_1) = 1$, $\lambda_{12} = 12 \cdot \lambda_1 = 12$.
Wkeit, dass der Aktienkurs unter 100 bleibt:

$$P(Y_{12} = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-12} = 6.144 \cdot 10^{-6}$$

Wkeit, dass der Aktienkurs während der ersten Stunde 100 übersteigt:

$$\begin{aligned} P(Y_1 > 0) = 1 - P(Y_1 = 0) &= 1 - \frac{\lambda_1^0 e^{-\lambda_1}}{0!} \\ &= 1 - e^{-1} = 1 - 0.3678794 = 0.6321206 \end{aligned}$$

Poisson-Verteilung

Approximation der Binomialverteilung für (sehr) kleine p: $Y \sim Bin(n, p)$

$$P(Y = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

mit $\lambda = np$.

Heuristik: Gleichverteilung
Sei $[a, b]$ ein Intervall und $I \subset [a, b]$ ein (sehr) kleines Teilintervall.
$|I|$ bezeichnet die Länge des Intervalls.
Anschauung: X ist gleichverteilt in $[a, b]$, wenn...

- $P(X \in I)$ ist proportional zu $|I|$
- $P(X \in I)$ invariant (ändert sich nicht) unter Verschiebungen von I:

$$P(X \in I + a) = P(X \in I), \qquad \forall a$$

Stetige Gleichverteilung

Stetige Gleichverteilung (uniforme Verteilung)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

X heißt dann **(stetig) gleichverteilt auf dem Intervall** $[a, b]$. Notation: $X \sim U[a, b]$. Für die Verteilungsfunktion ergibt sich:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad x \in [a, b],$$

sowie $F(x) = 0$, wenn $x < a$, und $F(x) = 1$, für $x > b$. Es gilt:

$$\text{Erwartungswert:} \quad E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$\text{Varianz:} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponentialverteilung

Wartezeit auf poissonverteiltes Ereignis:

1. Die Anzahl von Ereignissen in einem Intervall sei Poi(λ)-verteilt.
2. Anzahl Y_t der Ereignisse in $[0, t]$ ist dann Poi(λt)-verteilt.
3. Sei X die Wartezeit auf das erste Ereignis.
4. Es gilt:

$$X > t \quad \Leftrightarrow \quad Y_t = 0$$

also

$$P(X > t) = P(Y_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

Linke Seite ist $1 - F_X(t)$. Also gilt für $t > 0$:

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

X heißt **exponentialverteilt**, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

X heißt **exponentialverteilt**, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$, wenn X die Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0,$$

und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ besitzt.

Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x\, dx \\ &= \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\ &= ... \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Varianz:

$$E(X-\lambda)^2 = E(X^2) - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \cdots = \frac{1}{\lambda^2}$$