Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 23. März 2023 Besprechung: 03 April 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 0

Dieses Übungsblatt dient der Wiederholung mathematischer Inhalte und wird in der Globalübung am 3. April besprochen.

Aufgabe W 1

(a) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Aussagen. Zeigen Sie die folgende Behauptung mittels einer Wahrheitstafel:

$$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A} \Longleftrightarrow \neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}.$$

Lösung:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B) \wedge A$
W	W	W	F	F
W	F	F	W	W
F	W	F	W	F
F	F	F	W	F

A	B	$\neg B$	$\neg B \wedge A$
W	W	F	F
W	F	W	W
F	W	F	F
F	F	W	F

(b) Gegeben seien Teilmengen A, B der Grundmenge Ω, also $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$. Dann bezeichnen

$$A \backslash B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \text{ und } \omega \notin B\}$$

das *Differenzereignis von A und B* und

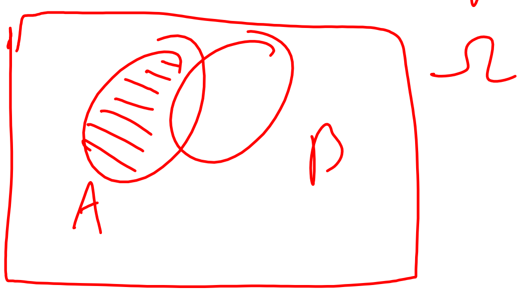
$$B^c = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \notin B\} = \Omega \backslash B$$

das *Komplementärereignis von B (in Ω)*. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Mengen - Gleichungen:

(1) $A \backslash B = A \cap B^c$

(2) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$,

Lösung: 1) Venn-Diagramm



Sei $x \in A \backslash B$. Zeige: $x \in A \cap B^c$

Es gilt: $x \in A \backslash B \Rightarrow x \in A$ und $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A$ und $x \in B^c$

$\Rightarrow x \in A \cap B^c$

$\Rightarrow \boxed{A \backslash B \subseteq A \cap B^c}$

Sei $x \in A \cap B^c$. Zeige: $x \in A \backslash B$

Es gilt: $x \in A \cap B^c \Rightarrow x \in A$ und $x \in B^c$

$\Rightarrow x \in A$ und $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A \backslash B$

$\Rightarrow \boxed{A \cap B^c \subseteq A \backslash B}$

$\Rightarrow A \backslash B = A \cap B^c$

(2) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

Venn-Diagramm

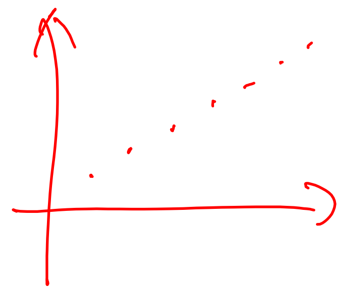
$(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

Distributivgesetz $\quad A \cap \underbrace{(B \cup B^c)}_{= \Omega} = A \cap \Omega \underset{=}{\overset{A \subseteq \Omega}{}} A$

Aufgabe W 2

Entscheiden und begründen Sie, welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt bzw. (streng) monoton ist. Untersuchen Sie die Folgen ebenfalls auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1}$



Lösung:

$$a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

$(a_n)_n$ ist unbeschränkt, da

$$|a_n| = |n| = n \longrightarrow \infty \text{ für } n \to \infty$$

Außerdem: $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ a_n ist streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ $(a_n)_n$ hat keinen endlichen Grenzwert

(b) $a_n = \frac{9+n}{n^2+1}$

Lösung: Beschränktheit

$$|a_n| = \left|\underbrace{\frac{9+n}{n^2+1}}_{\geq 0}\right| = \frac{9+n}{n^2+1} = \underbrace{\frac{9}{n^2+1}}_{\leq 9} + \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{=\frac{1}{n+\frac{1}{n}} < 1} \leq 9+1 = 10$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

Monotonie

Falls $(a_n)_n$ streng monoton fallend ist, dann muss gelten

$$a_n > a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9+n}{n^2+1} > \frac{9+n+1}{(n+1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (9+n)\cdot((n+1)^2+1) > (9+n+1)\cdot(n^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (9+n)\cdot(n^2+2n+1+1) > (9+n+1)\cdot(n^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(9+n)\cdot(n^2+1)} + (9+n)\cdot(2n+1) > \cancel{(9+n)(n^2+1)} + (n^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (9+n)\cdot(2n+1) > n^2+1$$

$$\Leftrightarrow 18n+9+2n^2+n > n^2+1$$

$$\Leftrightarrow n^2+19n+8 > 0$$

Da die letzte Aussage für alle $n\in\mathbb{N}$ erfüllt ist, ist die Folge streng monoton fallend.

$\Rightarrow (a_n)_n$ ist konvergent mit Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9+n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{9}{n^2}+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{0+0}{1+0} = 0$$

geom. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

Aufgabe W 3

(a) Untersuchen Sie die nachstehend definierte Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

Lösung:

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ s_n ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{geom. Reihe mit } |q| = \frac{1}{2} < 1} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2}{5^k}\right).$$

Lösung

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2}{5^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{5^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{5^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - 1 - 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k + 2$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2}{5^k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k - 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k + 1$$

$$\underset{\text{Reihe}}{\overset{\text{geom.}}{=}} \frac{1}{1-\frac{3}{5}} - 2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} + 1$$

$$= \frac{5}{2} - 2\cdot\frac{5}{4} + 1 = 1$$

Aufgabe W 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_1^{e^2} x^4 \ln(x)\, dx$$

Lösung:

$$\int_1^{e^2} x^4 \cdot \ln(x)\, dx = \int_1^{e^2} f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

mit $f'(x) = x^4$ und $g(x) = \ln(x)$

$$\underset{=}{\overset{PI}{\to}} \left[\frac{1}{5}x^5 \cdot \ln(x)\right]_1^{e^2} - \int^{e^2} \frac{1}{5} x^5 \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{5} e^{10} \cdot 2 - \frac{1}{5}\left[\cdot \frac{1}{5} \cdot x^5\right]_1^{e^2}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot e^{10} - \frac{1}{25} \cdot e^{10} + \frac{1}{25}$$

(b)

$$\int_{-2}^{2} x^2 e^{x^3}\,dx$$

Lösung:

$$\int_{-2}^{2} x^2 e^{x^3}\,dx$$

Substitute $u = x^3$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow du = 3x^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3x^2}\,du = dx$$

$$= \int_{(-2)^3}^{2^3} \cancel{x^2} e^u \cdot \frac{1}{3\cancel{x^2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-8}^{8} e^u\,du = \frac{1}{3}\left[e^u\right]_{-8}^{8} = \frac{1}{3}\left(e^8 - e^{-8}\right)$$

(c)

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\,dx, \quad k > 0$$

Lösung:

$$\int_0^c e^{-kx}\,dx = \left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^c$$

$$= -\frac{1}{k}\left(e^{-kc} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{k}\left(1 - e^{-kc}\right) \quad \text{für } c > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-kx}\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_0^c e^{-kx}\,dx$$

$$= \lim_{c \to \infty} \frac{1}{k}\left(1 - e^{-kc}\right)$$

$$= \frac{1}{k}$$