Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 11. April 2023 — Besprechung: 17. April 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Ein Unternehmen hat insgesamt 100 Bewerber auf eine frei gewordene Stelle. Die Bewerber auf diese Stelle werden in Männer und Frauen sowie hinsichtlich ihrer Qualifikation in qualifiziert bzw. unqualifiziert eingeteilt. Die Menge der weiblichen Bewerber wird mit A bezeichnet, die Menge der qualifizierten Bewerber mit B.

Was wird durch die folgenden Mengen beschrieben?

(a) A^c,

(b) $A \cap B^c$,

(c) $A \setminus B$,

(d) $(A \cup B)^c$,

(e) $(A \setminus B) \cup B$

(f) $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$.

A: Frauen

B: qualifizierte Bewerber

Lösung:

a) $A^c \hat{=}$ Männer

b) $A \cap B^c \hat{=}$ unqualifizierte Frauen

c) $A \setminus B \overset{W1}{=} A \cap B^c$ "

d) $(A \cup B)^c \overset{\text{de Morgan}}{=} A^c \cap B^c$

$\hat{=}$ unqualifizierten Männer

e) $(A \setminus B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B$

$\hat{=}$ unqualifizierten Frauen oder alle qualifizierten Bewerber

$= A \cup B$

f) $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$

Distributivgesetz

$$\overset{\text{Distributivgesetz}}{=} \underbrace{(A \cap A^c)}_{= \emptyset} \cup (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c) \cup \underbrace{(B^c \cap B)}_{= \emptyset}$$

$$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$$

$\hat{=}$ qualifizierte Frauen ode unqualifizierte Männer

Aufgabe 2

Gegeben seien zwei Teilmengen A und B der Grundmenge Ω, also $A \subset \Omega$ und $B \subset \Omega$.

(a) Zeigen Sie: $A \cup B = (A \backslash B) \cup B$

(b) Seien nun P ein Wahrscheinlichkeitsmaß und A, B Ereignisse mit $B \subset A$. Bestimmen Sie $P(A \cup B)$.

Lösung: a) Z.z. $A \cup B \subset (A \setminus B) \cup B$

Sei dazu $\omega \in A \cup B$

$\Rightarrow \omega \in A$ oder $\omega \in B$

1. Fall $\omega \in A$ und $\omega \notin B$

$\Rightarrow \omega \in A \setminus B$

$\Rightarrow \omega \in (A \setminus B) \cup B$

2. Fall $\omega \notin A$ und $\omega \in B$

$\Rightarrow \omega \in B \cup (A \setminus B)$

3. Fall $\omega \in A$ und $\omega \in B$

$\Rightarrow \omega \in (A \setminus B) \cup B$

$\Rightarrow A \cup B \subset (A \setminus B) \cup B$.

Sei $\omega \in (A \setminus B) \cup B$

$\Rightarrow \omega \in A \setminus B$ oder $\omega \in B$

$\Rightarrow (\omega \in A$ und $\omega \notin B)$ oder $\omega \in B$

1. Fall $\omega \in A$ und $\omega \notin B$

$\Rightarrow \omega \in A \cup B$.

2. Fall $\omega \in B \Rightarrow \omega \in A \cup B$

$\Rightarrow (A \setminus B) \cup B \subset A \cup B$

$\Rightarrow (A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

b) $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A)$

Alternativ: Siebformel $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) \overset{a)}{=} P((A \setminus B) \cup B)$$

$$\overset{\text{Siebformel}}{=} P(A \setminus B) + P(B) - \underbrace{P(\underbrace{(A \setminus B) \cap B}_{=\emptyset})}_{=0}$$

$$= P(A \setminus B) + P(B)$$

$$\overset{B \subset A}{=} P(A) - P(B) + P(B)$$

$$= P(A)$$

Aufgabe 3

In einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien von den Ereignissen A, B und C die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

(i) $P(B) = \frac{7}{20}$, (ii) $P(C^c) = \frac{7}{10}$, (iii) $P(A) = \frac{3}{10}$,
(iv) $P(A^c \cap C) = \frac{1}{4}$, (v) $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$, (vi) $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{20}$,
(vii) $P((A \cup B) \cap C) = \frac{3}{20}$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der nachfolgenden Ereignisse:

(a) $A \cup B$, (b) $A^c \cup C$, (c) $A \cap C$,
(d) $A \cap B^c \cap C$, (e) $B \cap C$, (f) $A \cup B \cup C$.

Lösung:

1) Komplemente berechnen

z.B. $P(B) = \frac{7}{20} \Rightarrow P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$

2) Rechenregeln von De Morgan:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3) Siebformel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

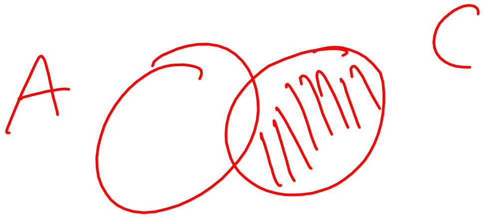
$$\overset{(iii)}{\underset{(v)}{=}} \frac{3}{10} + \frac{7}{20} - \frac{1}{10} = \frac{11}{20}$$

b) $P(A^c \cup C) = P(A^c) + P(C) - P(A^c \cap C)$

$$= 1 - P(A) + 1 - P(C^c) - P(A^c \cap C)$$

$$= 1 - \frac{3}{10} + 1 - \frac{7}{10} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

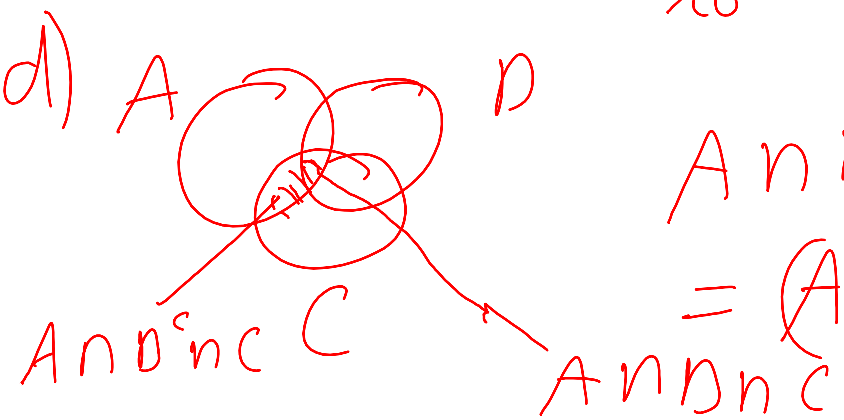
c) $A \cap C = C \setminus (A^c \cap C)$



$A^c \cap C \subset C$

$$P(A \cap C) = P(C \setminus (A^c \cap C))$$
$$= P(C) - P(A^c \cap C)$$
$$= 1 - P(C^c) - P(A^c \cap C)$$
$$\overset{(iv)}{=} 1 - \frac{7}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

d)



$A \cap B^c \cap C$

$= (A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$

$$\Rightarrow P(A \cap B^c \cap C) = P((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C))$$

$A \cap B \cap C \subset A \cap C$

$$= P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$
$$\overset{c)}{\underset{(vi)}{=}} \frac{1}{20} - \frac{1}{20} = 0$$

e) $P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C))$

$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap C \cap B)$$

$\boxed{\text{Rest: Seite 12}}$

Aufgabe 4

Es werden gleichzeitig ein roter und ein schwarzer Würfel geworfen (beides unverfälschte, jeweils sechsseitige Würfel mit den Augenzahlen $1, \ldots, 6$). $\Rightarrow$ Laplace-Experiment

(a) Geben Sie zu diesem Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß P an, und beschreiben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω:

- (i) *Die Augensumme beträgt 8.*
- (ii) *Die Augensumme ist kleiner als 5.*
- (iii) *Beide Augenzahlen betragen jeweils höchstens 3.*
- (iv) *Die Augenzahl des roten Würfels ist geringer als die des schwarzen Würfels.*

(b) Berechnen Sie für die Ereignisse aus (a) die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Lösung: Grundraum: Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1,..,6\},\ i \in \{1,2\}\}$$

$$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \ldots\}$$

mit der Interpretation: $(1 \leq i, j \leq 6)$

$\omega_1 = i$ bedeutet: Roter Würfel zeigt die Zahl i

$\omega_2 = j$ bedeutet: Schwarzer Würfel zeigt die Zahl j

Anzahl der Elemente in Ω ist $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36 = 6^2$

(i) $A =$ "Augensumme beträgt 8"

$$= \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 = 8\}$$

$$= \{(2,6), (6,2), (5,3), (3,5), (4,4)\}$$

$\Rightarrow |A| = 5$

(ii) $B =$ "Augensumme kleiner als 5"

$$= \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 < 5\}$$

$$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1), (2,2)\}$$

$\Rightarrow |B| = 6$

$C =$ "beide Augenzahlen betragen jeweils höchstens 3"
$= \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 \leq 3, \omega_2 \leq 3\}$

$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3),$
$(3,2)\}$

$\Rightarrow |C| = 9$

$D =$ "Augenzahl des roten Würfels ist geringer als die schwarzen Würfels"

$= \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 < \omega_2\}$

$= \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5),$
$(2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$

$\Rightarrow |D| = 15$

b) Laplace-Raum, da unverfälschte Würfel, d.h.

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \quad \text{für } \omega \in \Omega$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{15}{36}$$
$$= \frac{5}{12}$$

Fortsetzung von A3 e)

$$\Rightarrow P(D \cap C) = P((A \cup D) \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap D \cap C)$$

$$\underset{(vi)}{\overset{(vii),(c)}{=}} \frac{3}{20} - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$$

f) $P(A \cup D \cup C) = P((A \cup D) \cup C)$

$$= P(A \cup D) + P(C) - P((A \cup D) \cap C)$$

$$\underset{(viii)}{\overset{a)}{=}} \frac{17}{20} + 1 - \frac{7}{10} - \frac{3}{20} = \frac{7}{10}$$