

## Einführung in die angewandte Stochastik

### Übungsblatt 2

#### Aufgabe 5

- (a) Fünf Karten, die mit den Zahlen eins bis fünf beschriftet sind, werden verdeckt gemischt und nebeneinander auf einen Tisch gelegt. Die ersten beiden Karten dieser Reihe werden aufgedeckt. Geben Sie zu diesem Experiment eine geeignete Ergebnismenge  $\Omega$  sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die 2. Karte einen Wert zeigt, der den Wert der 1. Karte um mindestens zwei übersteigt.
- (b) Gegeben sei eine Urne mit zwei roten und zwei schwarzen Kugeln. Aus dieser Urne wird vier Mal mit Zurücklegen gezogen und notiert, wie viele rote Kugeln unter den vier gezogenen Kugeln waren. Geben Sie zu diesem Experiment eine geeignete Ergebnismenge  $\Omega$  sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass genau zwei von den vier gezogenen Kugeln rot sind.

#### Aufgabe 6

- (a) Zeigen Sie, dass das folgende Mengensystem eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega \neq \emptyset$  ist:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \quad \emptyset \neq A \subset \Omega, \quad A \neq \Omega$$

- (b) Gegeben seien eine Menge  $\Omega \neq \emptyset$ , eine (beliebige) Indexmenge  $I \neq \emptyset$  sowie  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_i$ ,  $i \in I$ , über  $\Omega$ . Zeigen Sie, dass dann das folgende Mengensystem ebenfalls eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  ist:

$$\mathcal{F} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i.$$

#### Aufgabe 7

Sei  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega \neq \emptyset$  und  $B \subset \Omega$  mit  $P(B) > 0$ . Zeigen Sie, dass dann durch

$$P_B : \Omega \rightarrow [0, 1], A \mapsto P_B(A) := P(A|B)$$

ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$  gegeben ist.

## Aufgabe 8

Zur Ausrüstung von Hochschulinstituten mit neuen Computern wurden insgesamt vier Firmen beauftragt: 30 % der gelieferten Rechner stammen von Firma A, jeweils 10 % von den Firmen B und C und die restlichen von Firma D.

Bei früheren Bestellungen hat sich gezeigt, dass von den Firmen A und B jeweils 5 %, von Firma C 2 % und von Firma D 4 % der gelieferten Rechner nicht funktionstüchtig waren.

Aus der letzten Lieferung wird ein Computer zufällig ausgewählt und überprüft.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der überprüfte Rechner funktionstüchtig ist?
- (b) Der überprüfte Rechner erweist sich als *nicht* funktionstüchtig.
  - (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde der Rechner von Firma B geliefert?
  - (ii) Welche Firma kommt am ehesten für die Lieferung in Frage?
- (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde der Rechner von Firma A oder von Firma C geliefert, wenn er sich bei der Überprüfung als funktionstüchtig erweist?