Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 18. April 2023 — Besprechung: 24. April 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 2

Aufgabe 5

(a) Fünf Karten, die mit den Zahlen eins bis fünf beschriftet sind, werden verdeckt gemischt und nebeneinander auf einen Tisch gelegt. Die ersten beiden Karten dieser Reihe werden aufgedeckt. Geben Sie zu diesem Experiment eine geeignete Ergebnismenge Ω sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß P an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die 2. Karte einen Wert zeigt, der den Wert der 1. Karte um mindestens zwei übersteigt.

(b) Gegeben sei eine Urne mit zwei roten und zwei schwarzen Kugeln. Aus dieser Urne wird vier Mal mit Zurücklegen gezogen und notiert, wie viele rote Kugeln unter den vier gezogenen Kugeln waren. Geben Sie zu diesem Experiment eine geeignete Ergebnismenge Ω sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß P an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass genau zwei von den vier gezogenen Kugeln rot sind. mit Reihenfolge

Lösung: a) Ergebnismenge

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1,2,3,4,5\}, \omega_1 \neq \omega_2\}$

Interpretation: ω_1: Wert der 1. Karte
ω_2: Wert der 2. Karte

$\Rightarrow |\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$

Da die Karten „verdeckt gemischt" werden haben wir hier ein Laplace-Experiment und als Wahrscheinlichkeitsmaß P haben wir die diskrete Gleichverteilung, d.h. jedes Ereignis $A \subset \Omega$ hat die W'keit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Definiere A = „die 2. Karte zeigt einen Wert, der den Wert der 1. Karte um mindestens zwei übersteigt"

$= \{ \underbrace{\omega}_{=(\omega_1,\omega_2)} \in \Omega : \omega_2 \geq \omega_1 + 2\}$

$= \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,5)\}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

b) Ergebnismenge:

$$\Omega = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) : w_i \in \{r, s\},\ i = 1,2,3,4\}.$$

Interpretation:

$w_i = r$ bedeutet, dass im i-ten Zug eine rote Kugel gezogen wurde

$w_i = s$ analog

Hier gilt: $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

P ist die diskrete Gleichverteilung

$\Rightarrow$ Laplace-Experiment

Definiere das Ereignis

$B =$ „genau 2 von 4 gezogenen Kugeln sind rot"

$= \{w \in \Omega : w_i = r,\ w_j = r$ für $i, j \in \{1,2,3,4\}$ mit $i \neq j$ und $w_k = s$ für $k \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}\}$

$= \{(r,r,s,s), (r,s,r,s), (r,s,s,r), (s,r,r,s), (s,r,s,r), (s,s,r,r)\}$

$\Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie, dass das folgende Mengensystem eine σ-Algebra über $\Omega \neq \emptyset$ ist:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \quad \emptyset \neq A \subset \Omega, \quad A \neq \Omega$$

(b) Gegeben seien eine Menge $\Omega \neq \emptyset$, eine (beliebige) Indexmenge $I \neq \emptyset$ sowie σ-Algebren $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, über Ω. Zeigen Sie, dass dann das folgende Mengensystem ebenfalls eine σ - Algebra über Ω ist:

$$\mathcal{F} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i.$$

Lösung: $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra, wenn

(A1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$

(A2) Aus $B \in \mathcal{F}$ folgt $B^c \in \mathcal{F}$

(A3) Aus $B_i \in \mathcal{F}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ folgt $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$

Zu a) $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

(A1) klar

(A2) Sei $B \in \mathcal{F}$, d.h. $B = \emptyset \vee B = A \vee B = A^c \vee B = \Omega$

Ist $B = \emptyset$, dann ist $B^c = \Omega \in \mathcal{F}$

Ist $B = \Omega$, dann ist $B^c = \emptyset \in \mathcal{F}$

Ist $B = A$, dann ist $B^c = A^c \in \mathcal{F}$

Ist $B = A^c$, dann ist $B^c = (A^c)^c = A \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow B^c \in \mathcal{F}$ $\forall B \in \mathcal{F}$

(A3) Seien $B_i \in \mathcal{F}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

Falls $B_{i_0} = \Omega$ für mind. ein $i_0 \in \mathbb{N}$ ist, dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega \in \mathcal{F}$

Falls $B_{i_0} = A$ für mind. ein $i_0 \in \mathbb{N}$ und $B_{i_1} = A^c$ für mind. ein $i_1 \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega \in \mathcal{F}$

Falls $B_i \in \{\emptyset, A\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ und $B_{i_0} = A$ für mind. ein $i_0 \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A \in \mathcal{F}$

Falls $B_i \in \{\emptyset, A^c\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ und $B_{i_0} = A^c$ für mind. ein i_0, dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A^c$

Falls $B_i = \emptyset$ $\forall i \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow$ Aus (A1) – (A3) folgt: $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra

Zu b) $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ und $\mathcal{F}_i$ sind σ-Algebren

Zu (A1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}_i$ $\forall i \in I$

$\Rightarrow \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$, $\emptyset \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$

Zu (A2) Sei $B \in \mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

$\Rightarrow B \in \mathcal{F}_i$ $\forall i \in I$

$\overset{\mathcal{F}_i\ \sigma\text{-Alg.}}{\Rightarrow} B^c \in \mathcal{F}_i$ $\forall i \in I$

$\Rightarrow B^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$

Zu (A3) Sei $B_n \in \mathcal{F}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow B_n \in \mathcal{F}_i$ $\forall n$ $\forall i$

$\overset{\mathcal{F}_i\ \sigma\text{-Alg.}}{\Rightarrow} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}_i$ $\forall i \in I$

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ ist σ-Algebra

Aufgabe 7

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega \neq \emptyset$ und $B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$. Zeigen Sie, dass dann durch

$$P_B : \Omega \to [0,1], A \mapsto P_B(A) := P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω gegeben ist.

Lösung: 1) $0 \leq P_B(A) \leq 1 \ \forall A \subset \Omega$

2) $P_B(\Omega) = 1$

3) Für disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ gilt

$$P_B\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P_B(A_i)$$

Zu 1) Sei $A \subset \Omega$. Weil $A \cap B \subset B$ folgt sofort

$P(A\cap B) \leq P(B)$, da P W'maß ist

$$\Rightarrow P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

und $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq \frac{0}{P(B)} = 0$, da P W'maß ist

Zu 2) $$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Zu 3) Seien disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ gegeben. Dann ist $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ disjunkt

$$\Rightarrow P_B\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \overset{\text{Def } P_B}{=} \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)\right)}{P(B)}$$

$$\overset{P \text{ W'maß}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i | B) = \sum_{i=1}^n P_B(A_i)$$

$\Rightarrow P_B$ ist W'maß

Aufgabe 8

Zur Ausrüstung von Hochschulinstituten mit neuen Computern wurden insgesamt vier Firmen beauftragt: 30 % der gelieferten Rechner stammen von Firma A, jeweils 10 % von den Firmen B und C und die restlichen von Firma D.

Bei früheren Bestellungen hat sich gezeigt, dass von den Firmen A und B jeweils 5 %, von Firma C 2 % und von Firma D 4 % der gelieferten Rechner nicht funktionstüchtig waren.

Aus der letzten Lieferung wird ein Computer zufällig ausgewählt und überprüft.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der überprüfte Rechner funktionstüchtig ist?

(b) Der überprüfte Rechner erweist sich als *nicht* funktionstüchtig.

  (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde der Rechner von Firma B geliefert?

  (ii) Welche Firma kommt am ehesten für die Lieferung in Frage?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde der Rechner von Firma A oder von Firma C geliefert, wenn er sich bei der Überprüfung als funktionstüchtig erweist?

Lösung: Bezeichnungen

A: "Der ausgewählte Computer stammt von Firma A"

B: " " " " " " B

C: " " " " " " C

D: " " " " " " D

F: "Der ausgewählte Computer ist funktionstüchtig"

Es bezeichne (Ω, P) den zugrundeliegenden Laplace-Raum, d.h. Ω ist die Ergebnismenge und P ist die diskrete Gleichverteilung. Dann gilt:

$P(A) = 0{,}3 \quad P(B) = 0{,}1 \quad P(C) = 0{,}1 \quad P(D) = 0{,}5$

(Hierbei werden die relativen Häufigkeiten aus der Aufgabenstellung als Wahrscheinlichkeiten interpretiert)

a) Gesucht: $P(F) = 1 - P(F^c)$

Laut Aufgabenstellung:

$P(F^c | A) = 0{,}05 \quad P(F^c | B) = 0{,}05$

$P(F^c | C) = 0{,}02 \quad P(F^c | D) = 0{,}04$

Laut Aufgabenstellung bilden die Ereignisse A, B, C, D eine disjunkte Zerlegung von Ω, es gilt daher

$$\Omega = \underbrace{A \cup B \cup C \cup D}_{\text{disjunkte Vereinigung}}$$

Es gilt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(F^c) = P(F^c \mid A) \cdot P(A) + P(F^c \mid B) \cdot P(B) + P(F^c \mid C) \cdot P(C) + P(F^c \mid D) \cdot P(D)$$

$$= 0{,}05 \cdot 0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}1 + 0{,}02 \cdot 0{,}1 + 0{,}04 \cdot 0{,}5$$

$$= 0{,}042$$

$$\Rightarrow P(F) = 1 - P(F^c) = 1 - 0{,}042 = 0{,}958$$

b) (I) Gesucht: $P(B \mid F^c)$

Es gilt mit der Bayes-Formel

$$P(B \mid F^c) = \frac{P(F^c \mid B) \cdot P(B)}{P(F^c)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}1}{0{,}042} \approx 0{,}119$$

(II) $$P(A \mid F^c) = \frac{P(F^c \mid A) \cdot P(A)}{P(F^c)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}3}{0{,}042} \approx 0{,}357$$

$$P(C \mid F^c) = \frac{P(F^c \mid C) \cdot P(C)}{P(F^c)} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}1}{0{,}042} \approx 0{,}048$$

$$P(D \mid F^c) = \frac{P(F^c \mid D) \cdot P(D)}{P(F^c)} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}5}{0{,}042} \approx 0{,}476$$

$\Rightarrow$ Firma D kommt am ehesten in Frage.

c) Gesucht: $P(A \cup C \mid F)$ A, C sind disjunkt

$$\overset{M \to P(M \mid F)}{\underset{\text{ist ein W-maß}}{=}} P(A \mid F) + P(C \mid F)$$

$$\underset{\text{nach A7 Bayes-Formel}}{=} \frac{P(F \mid A) \cdot P(A)}{P(F)} + \frac{P(F \mid C) \cdot P(C)}{P(F)}$$

$$= \frac{(1 - P(F^c \mid A)) \cdot P(A)}{P(F)} + \frac{(1 - P(F^c \mid C)) \cdot P(C)}{P(F)}$$

$$= \frac{1}{0{,}958} \cdot \left((1 - 0{,}05) \cdot 0{,}3 + (1 - 0{,}02) \cdot 0{,}1 \right)$$

$$= \frac{0{,}383}{0{,}958} \approx 0{,}4$$