Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 02. Mai 2023 — Besprechung: 08. Mai 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 3

Zufallsvariable

messbare Funktion $X: \Omega \to T \subset \mathbb{R}$

Ω abzählbar: jede Funktion X ist ZV → KGÜ

Ω überabzählbar: $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{G}$,

$\mathcal{F}$ ist σ-Alg. über Ω, $\mathcal{G}$ ist σ-Alg. über T

Schreibweise: $P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$, $A \subset T$

Unterscheidung	diskret	stetig
Wertebereich $T = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$	endlich oder abzählbar	überabzählbar
Dichte	Zähldichte $p_X(x) = P(X = x),\ x \in \mathbb{R}$ $p_X(x) \geq 0 \ \forall x$ $\sum_{x \in T} p_X(x) = 1$	Dichtefunktion $f_X(x),\ x \in \mathbb{R}$ $f_X(x) \geq 0 \ \forall x$ $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$
Wahrscheinlichkeiten	$P(X \in A) = \sum_{w \in A} p_X(w)$ $P(X = b) \neq 0$ möglich $P(X \leq b) = P(X < b) + P(X = b)$	$P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$ $P(X = b) = \int_b^b f_X(x)\,dx = 0$ $P(X \leq b) = P(X < b)$
Verteilungsfunktion	$F_X(z) = P(X \leq z)$	$F_X(z) = P(X \leq z)$

$$= \sum_{i=c}^{z} p(X=i) \qquad = \int_{c}^{z} f_X(t)\,dt$$

$c = -\infty$,

Es gilt: $f_X(z) = F_X(z)$

Aufgabe 9

Es sei $\Omega = \{0,1,2\}$, und für $c \in \mathbb{R}$ sei die Abbildung $p_c : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$p_c(0) := c^2, \quad p_c(1) := \frac{1}{6}c, \quad p_c(2) := \frac{5}{6}.$$

Bestimmen Sie alle Parameter $c \in \mathbb{R}$, für die durch die zugehörige Funktion p_c eine Zähldichte auf Ω gegeben ist.

Lösung: Für $c \in \mathbb{R}$ ist p_c eine Zähldichte auf Ω, falls

(i) $p_c(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$

(ii) $\sum_{\omega \in \Omega} p_c(\omega) = 1$

Zu (i)

$p_c(0) = c^2 \geq 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$p_c(2) = \frac{5}{6} \geq 0$

Außerdem $p_c(1) = \frac{1}{6} \cdot c \geq 0 \iff \boxed{c \geq 0}$

Zu (ii) Für $c \geq 0$ gilt

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_c(\omega) = p_c(0) + p_c(1) + p_c(2) \overset{!}{=} 1$$

$$\iff c^2 + \frac{1}{6}c + \frac{5}{6} \overset{!}{=} 1$$

$$\iff c^2 + \frac{1}{6}c - \frac{1}{6} = 0$$

p-q-Formel

$$\Rightarrow c_{1,2} = -\frac{\frac{1}{6}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{6}}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}}$$

$$= -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{6}}$$

$$= -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144}}$$

$$= -\frac{1}{12} \pm \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Da nach (1) $c \geq 0$ gelten muss, kommt nur die Lösung $c_1 = \frac{1}{3}$ in Frage.

$\Rightarrow$ Für $c = \frac{1}{3}$ ist p_c eine Zähldichte auf Ω.

Aufgabe 10

Es werden zwei faire, sechsseitige Würfel geworfen. Die Summe der Augenzahlen sei mit X bezeichnet.

(a) Modellieren Sie die Situation als Laplace Raum (Ω, P) und definieren Sie X als geeignete Zufallsvariable.
$\rightarrow \mathcal{F} = \mathrm{Pot}(\Omega)$ ist klar

(b) Beschreiben Sie ein Ereignis $A \subset \Omega$, das sich nicht durch X beschreiben lässt, das also keine Darstellung $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ besitzt.

(c) Bestimmen Sie die Verteilung P_X von X. $\longrightarrow$ Zähldichte angeben

(d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

Lösung: a) Laplace-Raum, da Würfel fair sind

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1,..,6\},\ i=1,2\}$$

mit der Interpretation:

$\omega_i = j$ heißt: Würfel i zeigt Zahl j

$i=1,2,\ j=1,..,6$

Wahrscheinlichkeitsmaß:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6\cdot 6} = \frac{1}{36} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega = (\omega_1, \omega_2) \longrightarrow X(\omega) = \omega_1 + \omega_2.$

b) z.B. $A = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 > \omega_2\}$ kann nicht durch X beschrieben werden

c) Es ist $P(X=i) = \dfrac{|\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega \mid \omega_1+\omega_2 = i\}|}{|\Omega|}$

$$P(X=1) = \frac{|\emptyset|}{36} = 0$$

$$P(X=2) = \frac{|\{(1,1)\}|}{36} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=3) = \frac{|\{(1,2),(2,1)\}|}{36} = \frac{2}{36}$$

$$P(X=4) = \frac{|\{(1,3),(3,1),(2,2)\}|}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(X=5) = \frac{|\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}|}{36} = \frac{4}{36}$$

$$P(X=6) = \frac{5}{36}, \quad P(X=7) = \frac{6}{36}, \quad P(X=8) = \frac{5}{36}$$

$$P(X=9) = \frac{4}{36}, \quad P(X=10) = \frac{3}{36}, \quad P(X=11) = \frac{2}{36}$$

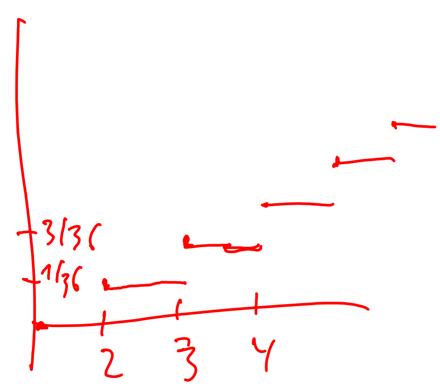
$$P(X=12) = \frac{1}{36}$$

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

d) Die Verteilungsfunktion von X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1/36, & 2 \le x < 3 \\ 3/36, & 3 \le x < 4 \\ 6/36, & 4 \le x < 5 \\ 10/36, & 5 \le x < 6 \\ 15/36, & 6 \le x < 7 \\ 21/36, & 7 \le x < 8 \\ 26/36, & 8 \le x < 9 \\ 30/36, & 9 \le x < 10 \\ 33/36, & 10 \le x < 11 \\ 35/36, & 11 \le x < 12 \\ 1, & 12 \le x \end{cases}$$

$$P(X \le x)$$



Aufgabe 11

Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x+2}}\,, & 2 \le x \le 7\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie c so, dass f Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X ist.

(b) Bestimmen Sie für das in (a) bestimmte c die Verteilungsfunktion F_X der Zufallsvariablen X.

(c) Berechnen Sie für das in (a) bestimmte c die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $P(X \in (-\infty, 5])$, (ii) $P(X \in (3, 5])$, (iii) $P(X \in (5, \infty))$.

(Hierbei bezeichnet P die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsrechnung.)

Lösung: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Dichtefunktion einer stetigen ZV, falls gilt:

(I) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(II) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Zu (I) Für $2 \leq x \leq 7$ ist

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x+2}} \geq 0 \iff c \geq 0$$

und für $x \notin [2,7]$ ist $f(x) = 0 \geq 0$.

Zu (II)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^7 \frac{c}{\sqrt{x+2}}\,dx = c\int_2^7 (x+2)^{-1/2}$$

$$= c\left[\frac{1}{1/2}(x+2)^{1/2}\right]_2^7$$

$$= 2c \cdot \left[\sqrt{x+2}\right]_2^7$$

$$= 2c \cdot \underbrace{\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right)}_{=1} = 2c \overset{!}{=} 1$$

$$\iff c = \frac{1}{2}$$

d.h. für $c = \frac{1}{2}$ ist f eine Dichtefunktion.

b) Die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X ist geg. durch

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Mit $c = \frac{1}{2}$ folgt

- für $t < 2$: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0$
- für $2 \leq t < 7$: $F_X(t) = \int_{2}^{t} \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\left[2\cdot\sqrt{x+2}\right]_2^t$
$$= \sqrt{t+2} - 2$$
- für $t \geq 7$: $F_X(t) = \int_{2}^{7} \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx = \sqrt{9} - 2 = 1$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0 \,, & t < 2 \\ \sqrt{t+2} - 2 \,, & 2 \leq t < 7 \\ 1 \,, & 7 \leq t \end{cases}$$

c) (i) $P(X \in (-\infty, 5]) = P(X \leq 5) = F_X(5) = \sqrt{7} - 2$
$$\approx 0{,}646$$

(ii) $P(X \in (3,5]) = P(3 < X \leq 5) = F_X(5) - F_X(3)$
$$= \sqrt{7} - 2 - (\sqrt{5} - 2)$$
$$= \sqrt{7} - \sqrt{5} \approx 0{,}41$$

(iii) $P(X \in (5, \infty)) = P((-\infty,\infty) \setminus (-\infty, 5])$

$(-\infty, 5] \subset (-\infty, \infty)$ $\Rightarrow$ $= P((-\infty,\infty)) - P(-\infty, 5])$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{5} f(t)\,dt$$

$$\underbrace{}_{=1} \qquad \underbrace{}_{=F(5)}$$

$$= 1 - F(5) = 1 - (\sqrt{7} - 2)$$

$$= 3 - \sqrt{7} \approx 0{,}354$$

Aufgabe 12

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$. Mit F^{-1} notieren wir wie in der Vorlesung die zugehörige Quantilfunktion. Zeigen Sie:

(a) Es gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $p \in (0,1)$

$$F(x) \leq p \Leftrightarrow x \leq F^{-1}(p) \ .$$

(b) Sei F nun stetig und streng monoton wachsend. Dann besitzt die Zufallsvariable $Y = F(X)$ die Verteilungsfunktion

$$G : \mathbb{R} \to [0,1], y \mapsto \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases} .$$

Lösung: $F^{-1}(p) \overset{Def}{=} \min\{w \in \mathbb{R} : F(w) \geq p\}$, $p \in (0,1)$

a) Seien $x \in \mathbb{R}$ und $p \in (0,1)$

z.z.: $F(x) \leq p \Rightarrow x \leq F^{-1}(p)$

Gelte $F(x) \leq p$. Weil für dieses x nun $F(x) \leq p$ gilt ist x eine untere Schranke der Menge $\{w \in \mathbb{R} : F(w) \geq p\}$. Mit der Def. der Quantilfunktion von F folgt dann

$$x \leq \min\{w \in \mathbb{R} : F(w) \geq p\} \overset{Def}{=} F^{-1}(p)$$

z.z. $x \leq F^{-1}(p) \Rightarrow F(x) \leq p$

Gelte $x \leq F^{-1}(p)$. Nach Def. von der Quantilfunktion ist $F^{-1}(p)$ das kleinste $w \in \mathbb{R}$, so dass $F(w) \geq p$. Nach Annahme ist hier aber $x \leq F^{-1}(p)$, d.h. x ist kleiner (oder gleich) diesem kleinsten $w \in \mathbb{R}$. Deshalb muss für dieses x nun $F(x) \leq p$ gelten.

b) Hilfslemma

Sei $f: D(f) \to W(f)$ streng monoton wachsend. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}: W(f) \to D(f)$

Bew f surjektiv: klar, nach Def. von $W(f)$ existiert zu jedem $y \in W(f)$ ein $x \in D(f)$, mit $f(x) = y$

f injektiv: Seien $x_1, x_2 \in D(f)$ mit $x_1 \neq x_2$, oBdA $x_1 < x_2$.
Weil f streng monoton wachsend ist folgt dann $f(x_1) < f(x_2)$, d.h. $f(x_1) \neq f(x_2)$
$\Rightarrow f$ injektiv

$\Rightarrow f$ bijektiv
$\Rightarrow$ Umkehrabbildung $f^{-1}: W(f) \to D(f)$ mit
$$f(f^{-1}(y)) = y, \ y \in W(f) \text{ bzw.}$$
$$f^{-1}(f(x)) = x, \ x \in D(f)$$

Zur Aufgabe $F(\mathbb{R}) = [0,1]$, deshalb kann $y = F(X)$ nur Werte in $[0,1]$ annehmen.
$\Rightarrow P(Y < 0) = P(Y \leq 0) = 0$, da Y stetig ist.

Sei nun $y \in (0,1)$
Nach Vor. ist F stetig und streng monoton wachsend
$\Rightarrow F$ bijektiv und die Umkehrfunktion F^{-1} existiert und stimmt mit der Quantilfunktion überein
$\Rightarrow F(F^{-1}(y)) = y \ \forall y \in (0,1)$.

$$\Rightarrow G(y) \overset{\text{Def VF}}{=} P(Y \leq y) \overset{\text{Def } Y}{=} P(F(X) \leq y)$$

$$\overset{(a)}{=} P(X \leq F^{-1}(y))$$

$$\overset{\text{Def VFX}}{=} F(F^{-1}(y)) = y.$$