Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 09. Mai 2023 — Besprechung: 15. Mai 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Sei X eine stetige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} n \cdot x^{n-1}, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie mit dem Dichtetransformationssatz die Verteilung der Zufallsvariable

$$Y = -\ln(X).$$

Aufgabe 14

Die gemeinsame Verteilung zweier diskreten Zufallsvariablen X und Y, d.h.

$$P(X = i, Y = j), \quad 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 5,$$

sei durch die folgende (unvollständige) Wahrscheinlichkeitstabelle gegeben.

$X = i$ \ $Y = j$	1	2	3	4	5	$P(X = i)$
1	0	0.1		0.1	0.2	
2	0.1		0.1	0.2	0.1	
$P(Y = j)$		0.2	0.1			

(a) Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle.

(b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(c) Berechnen Sie $E(X)$, $Var(X)$ und $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Aufgabe 15

Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit

$$E(X) = 2, \quad E(X^2) = 5, \quad E(Y) = 1, \quad E(Y^2) = 7.$$

Weiter seien

$$V := X - 2Y \quad \text{und} \quad W := 3X + Y - 10.$$

Berechnen Sie

(a) $E(V)$

(b) $E(W)$

(c) $E(V \cdot W)$

(d) $\sigma_V^2 = \mathrm{Var}(V)$

(e) $\sigma_W^2 = \mathrm{Var(W)}$

(f) Die Standardabweichung σ_V von V.

Aufgabe 16

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable (d.h. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$) mit Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen X^2.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X^2)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X^2 und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung.

Aufgabe 17

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $(0, \infty)$. Zeigen Sie, dass

$$E(\ln(X)) < \ln(E(X))$$

gilt.