Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 09. Mai 2023 Besprechung: 15. Mai 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Sei X eine stetige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} n \cdot x^{n-1}, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$f_X(x) \geq 0 \ \forall x$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$\| \quad n \cdot x^{n-1} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$

$= \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$

für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie mit dem Dichtetransformationssatz die Verteilung der Zufallsvariable

$$Y = -\ln(X).$$

Lösung:

1. Funktion definieren

$g: (0,1) \to (0,\infty),\ x \to g(x) := -\ln(x)$

2. Zeige, dass g umkehrbar ist, d.h. g ist bijektiv

g surjektiv: Für beliebiges $y \in (0,\infty)$ exist. mind. ein $x \in (0,1)$, so dass $y = -\ln(x)$ ist, nämlich $x = e^{-y}$.

g injektiv: Seien $x_1, x_2 \in (0,1)$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann gilt

$g(x_1) = -\ln(x_1) \neq -\ln(x_2) = g(x_2)$.

$\Rightarrow$ g ist bijektiv

$\Rightarrow$ g ist umkehrbar und die Umkehrfunktion ist ges. durch

$$g^{-1}: (0,\infty) \to (0,1)$$
$$y \to g^{-1}(y) = e^{-y}.$$

3. g und g^{-1} sind stetig differenzierbar und für die Ableitung von g^{-1} gilt:

$$(g^{-1})'(y) = \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = -e^{-y}, \quad y \in (0,\infty).$$

4. Dichtetransformationssatz anwenden: für die ZV $Y = g(X)$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Hier haben wir

$$f_X(g^{-1}(y)) = f_X(e^{-y})$$
$$= n \cdot (e^{-y})^{n-1} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{(0,1)}(e^{-y})}_{= \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y), \text{ da } e^{-y} < 1 \ \forall y > 0}$$
$$= n (e^{-y})^{n-1} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = n (e^{-y})^{n-1} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot |-e^{-y}|$$
$$= n e^{-ny} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Dies ist die Dichte einer Exponentialverteilung mit Parameter n, d.h. $Y \sim Exp(n)$

Zweiter (X, Y)

Aufgabe 14

Die gemeinsame Verteilung zweier diskreten Zufallsvariablen X und Y, d.h.

$$P(X=i, Y=j), \quad 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 5,$$

Kontingenztafel

sei durch die folgende (unvollständige) Wahrscheinlichkeitstabelle gegeben.

Randverteilung von X

$X=i$ \ $Y=j$	1	2	3	4	5	$P(X=i)$
1	0	0.1	0	0.1	0.2	0.4
2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.6
$P(Y=j)$	$\boxed{0.1}$	0.2	0.1	0.3	0.3	1

Randverteilung von Y

(a) Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle.

(b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(c) Berechnen Sie $E(X)$, $Var(X)$ und $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Lösung: a) siehe oben

b) X und Y sind stoch. unabhängig, falls gilt

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$$

für alle $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{1,2,3,4,5\}$

Hier haben wir aber

$$P(X=1, Y=1) = 0 \neq 0.04 = 0.4 \cdot 0.1$$
$$= P(X=1) \cdot P(Y=1),$$

so dass X und Y nicht stoch. unabh. sind.

c) $$E(X) = \sum_{i \in \{1,2\}} i \cdot P(X=i) = 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2)$$
$$= 0.4 + 2 \cdot 0.6$$
$$= 1.6$$

Wertebereich von X

$$Var(X) \underset{\text{Verschiebungssatz}}{=} E(X^2) - (E(X))^2$$

Hier ist

$$E(X^2) = \sum_{i \in \{1,2\}} i^2 \cdot P(X=i)$$

$$= 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2)$$

$$= 0.4 + 4 \cdot 0.6 = 2.8$$

$$\Rightarrow Var(X) = 2.8 - 1.6^2 = 0.24$$

Weiter ist

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{i \in \{1,2\}} \frac{1}{i} \cdot P(X=i)$$ (Transformationsformel für den Erwartungswert)

$$= 1 \cdot P(X=1) + \frac{1}{2} \cdot P(X=2)$$

$$= 0.4 + \frac{1}{2} \cdot 0.6 = 0.7$$

Aufgabe 15

Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit

$$E(X) = 2, \quad E(X^2) = 5, \quad E(Y) = 1, \quad E(Y^2) = 7.$$

Weiter seien

$$V := X - 2Y \quad \text{und} \quad W := 3X + Y - 10.$$

Berechnen Sie

(a) $E(V)$

(b) $E(W)$

(c) $E(V \cdot W)$

(d) $\sigma_V^2 = \text{Var}(V)$

(e) $\sigma_W^2 = \text{Var(W)}$

(f) Die Standardabweichung σ_V von V.

Lösung: X, Y seien ZV, $a \in \mathbb{R}$

1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

2) $E(aX) = a \cdot E(X)$

3) $E(a) = a$

4) $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, falls X und Y stoch. unabh.

5) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$, falls X und Y sind stoch. unab.

6) $Var(aX) = a^2 Var(X)$

7) $Var(X+a) = Var(X)$

8) Verschiebungssatz: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

---

a) $E(V) = E(X - 2Y) = E(X) - 2E(Y) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$

b) $E(W) = E(3X + Y - 10) = 3E(X) + E(Y) - 10$
$= 3 \cdot 2 + 1 - 10 = -3$

c) $E(V \cdot W) = \cancel{E(V) \cdot E(W)}$

V und W sind <u>nicht</u> stochastisch unabhängig!

$$E(V\cdot W) = E((X-2Y)\cdot(3X+Y-10))$$
$$= E(3X^2+XY-10X-6XY-2Y^2+20Y)$$
$$= 3E(X^2)+\underbrace{E(XY)}_{=E(X)\cdot E(Y)}-10E(X)-6\cdot\underbrace{E(XY)}_{=E(X)\cdot E(Y)}-2E(Y^2)+20E(Y)$$

da X, Y stoch. unabh.

$$= 3\cdot 5+2\cdot 1-10\cdot 2-6\cdot 2\cdot 1-2\cdot 7+20\cdot 1$$
$$= -9$$

d) $\sigma_V^2 = Var(V) = Var(X-2Y)$

$$\overset{X,Y \text{ stoch. unabh.}}{=} Var(X)+(-2)^2\cdot Var(Y)$$
$$= E(X^2)-(E(X))^2+4\cdot(E(Y^2)-(E(Y))^2)$$
$$= 5-2^2+4\cdot(7-1^2)$$
$$= 1+24 = 25$$

e) $Var(W) = Var(3X+Y-10) = Var(3X+Y)$

$$\underset{\text{stoch. unabh.}}{\overset{X,Y}{=}} 9\,Var(X)+Var(Y)$$
$$= 9(E(X^2)-(E(X))^2)+E(Y^2)-(E(Y))^2$$
$$= 9\cdot(5-2^2)+7-1^2$$
$$= 9+6 = 15$$

f) Die Standardabweichung σ_V von V ist die Wurzel der Varianz von V. Also gilt

$$\sigma_V = \sqrt{Var(V)} = \sqrt{\sigma_V^2} = \sqrt{25} = 5$$

Aufgabe 16

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable (d.h. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$) mit Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen X^2.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X^2)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X^2 und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung.

Lösung:

Es gilt $F_{X^2}(y) \overset{\text{Def. VF}}{=} P(X^2 \leq y)$

$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

$= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y})$

$\overset{X \sim \mathcal{N}(0,1)}{=} \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} \varphi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} \varphi(x)\,dx$

$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \varphi(x)\,dx$

$\boxed{\int_a^a \varphi(x)\,dx = 0 \quad P(X=a)=0 \hookrightarrow P(X \leq a) = P(X<a), \text{ falls } X \text{ stetig}}$

$\overset{\text{Def } \varphi}{=} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

Subst $u = x^2 \Rightarrow \sqrt{u} = x$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{u}} e^{-\frac{u}{2}}\,du$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y u^{-1/2} e^{-u/2}\,du$

Nach der HDI hat X^2 somit die Dichte

$$f_{X^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot 1\!\!1_{(0,\infty)}(y)$$

Die entsprechende Verteilung heißt χ^2-Verteilung mit 1 Freiheitsgrad.

b) $E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2$ nach dem Verschiebungssatz

$= 1 + 0^2 = 1$

$\boxed{X \sim N(0,1) \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \mu \text{ EW},\ \sigma^2 \text{ Var}}$

Alternativ:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X^2}(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \dots = 1$$

oder $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dots = 1$

Aufgabe 17

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $(0, \infty)$. Zeigen Sie, dass

$$E(\ln(X)) < \ln(E(X))$$

gilt.

Lösung: Jensen-Ungleichung:

Für jede streng konkave Funktion g gilt

$$E(g(X)) < g(E(X)).$$

Hier $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$x \to g(x) = \ln(x)$$

Zeige: g ist streng konkav

Satz $f : T \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}$, stetig diff.bar

Dann gilt:

f (streng) konkav $\Leftrightarrow$ f' (streng) monoton fallend auf T

f (streng) konvex $\Leftrightarrow$ f' (streng) monoton wachsend auf T

---

g ist stetig diff.bar auf $(0, \infty)$ mit $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Seien weiter $x, y \in (0, \infty)$ mit $x < y$. bzw. äquivalent $y - x > 0$

Dann ist

$$g'(x) - g'(y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} > 0$$

$\Rightarrow$ g' streng monoton fallend auf $(0, \infty)$

$\Rightarrow$ g streng konkav

$\xRightarrow{\text{Jensen-Ungl.}}$ Beh.