Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 16. Mai 2023 — Besprechung: 22. Mai 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 5

Aufgabe 18

In einer Warensendung mit 100 Transistoren befinden sich 5 defekte Stücke. Der Empfänger entnimmt der Sendung zufällig 10 Transistoren und überprüft diese. Er verweigert die Annahme der Warensendung, wenn sich unter den überprüften Transistoren mindestens 2 als defekt erweisen.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(i) von den 10 entnommenen Transistoren genau einer defekt ist,

(ii) der Empfänger die Annahme der Warensendung verweigert

unter der Voraussetzung, dass die überprüften Transistoren *nicht* wieder in die Warensendung zurückgelegt werden.

(b) Berechnen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse aus (a) unter der Voraussetzung, dass jeder überprüfte Transistor anschließend wieder in die Warensendung zurückgelegt wird.

Lösung: Übertragung Aufgabenstellung $\Leftrightarrow$ Urnenmodell

Urne mit $N = 100$ Kugeln
$R = 5$ rot (defekte Transistoren)
$B = N - R = 100 - 5$ (intakte Transistoren)

Zufällige Stichprobe im Umfang von $n = 10$

Weitere Bezeichnungen:

$A_k \hat{=}$ „Genau k defekte Transistoren in der Stichprobe für $k \in \{0, \dots, 5\}$"

$B \hat{=}$ „Mindestens 2 defekte Transistoren in der Stichprobe"

a) (i) Ziehen ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge, da nur die Anzahl defekter Transistoren relevant ist

$\rightarrow$ Urnenmodell 3 $\rightsquigarrow$ Hypergeometrische Verteilung

$$\Rightarrow P(A_1) = \frac{\binom{R}{1} \cdot \binom{N-R}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} \approx 0{,}339$$

(ii) Gesucht $P(B)$. Es gilt

$$P(B) = 1 - P(B^c)$$

$= 1 - P($„weniger als 2 sind defekt"$)$

$= 1 - P($„Entweder keine ist defekt, oder genau 1 Transistor ist defekt"$)$

A_0, A_1 disjunkt

$$= 1 - (P(A_0) + P(A_1))$$

$$= 1 - P(A_0) - P(A_1)$$

$$\boxed{P(B) \approx 1 - 0{,}584 - 0{,}339 = 0{,}077}$$

Hier ist $P(A_0) = \frac{\binom{R}{0}\binom{N-R}{n-0}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} \approx 0{,}584$

b) Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

$\rightarrow$ Urnenmodell 4 $\Rightarrow$ Binomialverteilung mit Parametern $n = 10$ und $p = \frac{R}{R+B} = \frac{5}{5+95} = \frac{1}{20}$

$$\Rightarrow P(A_1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1}$$

$$= \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{10-1} \approx 0{,}315$$

und $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - P(A_0) - P(A_1)$

$$\approx 0{,}086$$

$$P(A_0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0}$$

Aufgabe 19

Die Zeit (in Minuten gemessen) zwischen der Versendung zweier E-Mails von einem in der Kundenberatung tätigen Mitarbeiter werde durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert 10 (Minuten) beschrieben. Berechnen Sie

(a) die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Zeit zwischen der Versendung zweier E-Mails 10 Minuten übersteigt.

(b) die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Zeit zwischen der Versendung zweier E-Mails 20 Minuten übersteigt, bedingt darunter, dass diese mindestens 10 Minuten beträgt.

Lösung:

Sei X = „Zeit zwischen de Versendung zweier mails" eine ZV auf einen W'Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Es ist $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, und es gilt

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \overset{!}{=} 10 \iff \lambda = \frac{1}{10}$$

$\Rightarrow$ X hat dann die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x} \underbrace{\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)}_{= \begin{cases} 1, & x \in (0,\infty) \\ 0, & x \notin (0,\infty) \end{cases}}$$

Dann hat X die VF

für $z \geq 0$: $$F_X(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{10} e^{-1/10 x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,dx$$

$$\overset{z \geq 0}{=} \int_{0}^{z} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x}\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\left[-10 e^{-1/10 x}\right]_0^z = 1 - e^{-\frac{1}{10}z}$$

$z < 0$: $$F_X(z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow F_X(z) = \begin{cases} 0 & , z < 0 \\ 1 - e^{-1/10 z} & , z \geq 0 \end{cases}$$

a) $$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F_X(10)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 10}\right) = e^{-1} \approx 0{,}368$$

b) $$P(X > 20 \mid X \geq 10) = \frac{P(X > 20, X \geq 10)}{P(X \geq 10)}$$

Hier ist $\{X > 20\} \subset \{X \geq 10\}$

$$\Rightarrow \{X > 20\} \cap \{X \geq 10\} = \{X > 20\}$$

$$= \frac{P(X > 20)}{P(X > 10)} = \frac{1 - P(X \leq 20)}{1 - P(X \leq 10)} = \frac{1 - F_X(20)}{1 - F_X(10)}$$

$$= \frac{1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 20}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 10}\right)} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$$

Aufgabe 20

Geben Sie zu den folgenden Situationen jeweils ein geeignetes Urnenmodell an, und berechnen Sie jeweils die Anzahl der zugehörigen möglichen Ergebnisse.

(a) Wie viele Händedrücke gibt es, wenn sich n Personen begrüßen und hierbei jede Person jeder anderen nur einmal die Hand gibt?

(b) Auf wie viele Arten können 622 Bundestagsmandate auf fünf Parteien verteilt werden?

Lösung: a) Wir nummerieren die n Personen mit den Zahlen von 1 bis n, und jeder Händedruck ist eine Kombination der Personennummern, also z.B. $(1,2), (1,3), (1,4), \dots$
$(2,3), (2,4), \dots$

die Auswahl der Personen erfolgt

– ohne Wiederholung (da sich keine Person selbst die Hand gibt)

– ohne Reihenfolge (da nur relevant ist welche Personen aufeinandertreffen)

$\rightsquigarrow$ Urnenmodell 3

Ergebnismenge: $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1, .., n\}, \omega_1 < \omega_2\}$

$$\Rightarrow |\Omega| = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

b) Die Verteilung der Mandate auf die Parteien erfolgt

– mit Wiederholung (da auf jede Partei mehrere Mandate fallen können)

– ohne Reihenfolge (da diese für die Aufteilung der Mandate keine Rolle spielt)

$\rightsquigarrow$ Urnenmodell 4

Ergebnismenge: $\Omega = \{(\underbrace{\omega_1, .., \omega_{622}}_{\text{Mandate}}) : \omega_1, .., \omega_{622} \in \overbrace{\{1, 2, 3, 4, 5\}}^{\text{Parteien}}, \omega_1 \leq \dots \leq \omega_{622}\}$

$$\Rightarrow |\Omega| = \binom{5-1+622}{622} = \frac{626!}{622! \cdot 4!} = \frac{626 \cdot 625 \cdot 624 \cdot 623}{24}$$

$V \sim Bin(n_1, p)$, $W \sim Bin(n_2, p)$, V, W stoch. unabh.

$\Rightarrow V + W \sim Bin(n_1 + n_2, p)$

Aufgabe 21

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$.

Zeigen Sie: Sind X und Y stochastisch unabhängig, so gilt

$$P(X+Y=k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} P(X=j)P(Y=k-j).$$

Faltung von ZV

Lösung:

1. $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = j\}$ disjunkte Zerlegung

$$\Rightarrow \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) + Y(\omega) = k\}$$
$$= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) + Y(\omega) = k\} \cap \Omega$$
$$\overset{1.}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) + Y(\omega) = k\} \cap \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = j\}$$
$$= \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) + Y(\omega) = k\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = j\}$$
$$= \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = j, \underbrace{X(\omega) + Y(\omega) = k}_{j + Y(\omega) = k}\}$$
$$= \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = j, Y(\omega) = k - j\}$$
$$\Rightarrow P(X+Y=k) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) + Y(\omega) = k\})$$
$$= P(\underbrace{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = j, Y(\omega) = k - j\}}_{\text{disjunkte Mengen}})$$
$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} P(X = j, Y = k - j) \underset{\text{unabh.}}{\overset{X, Y \text{ st.}}{=}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} P(X = j) \cdot P(Y = k - j)$$

Aufgabe 22

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^s e^{-(x+1)y}}{(s-1)!} & , \text{ falls } x, y > 0, \\ 0 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

wobei $s \in \mathbb{N}$ gelte.

(a) Bestimmen Sie die Randdichte f_Y von Y und geben Sie die Verteilung von Y an.

(b) Sei $y > 0$ gegeben. Bestimmen Sie die bedingte Dichte $f_{X|Y=y}$ von X gegeben $Y = y$. Um die Dichte welcher Verteilung handelt es sich?

(c) Berechnen Sie für $y > 0$ den bedingten Erwartungswert $E(X|Y = y)$ von X gegeben $Y = y$.

Hinweis: *Die Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \beta)$ ist definiert durch die Dichtefunktion*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

für Parameter $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Dabei bezeichnet $\Gamma(\cdot)$ die durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt, \qquad z > 0,$$

definierte Gammafunktion.

Lösung: a) Für $y > 0$ gilt

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^s e^{-(x+1)y}}{(s-1)!}\, dx$$

$$= \frac{y^s \cdot e^{-y}}{(s-1)!} \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-xy}\, dx$$

$$= \frac{y^s \cdot e^{-y}}{(s-1)!} \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x=a}$$

$$= \frac{y^s e^{-y}}{(s-1)!} \left(-\lim_{a\to\infty} \frac{e^{-ay}}{y} + \frac{1}{y}\right) = \frac{y^{s-1} e^{-y}}{(s-1)!}$$

Für $y \le 0$ erhalten wir

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0$$

$$\Rightarrow Y \sim \Gamma(1, s) \quad \left(\text{Beachte: } \Gamma(s) = (s-1)! \text{ für } s \in \mathbb{N}\right)$$

b) Für gegebenes $y > 0$ gilt nach a)

$$f_Y(y) > 0$$

Damit gilt für $x > 0$

$$f_{X|Y=y}(x) \overset{\text{Def.}}{=} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{\frac{y^s\, e^{-(x+1)y}}{(s-1)!}}{\frac{y^{s-1}\, e^{-y}}{(s-1)!}}$$

$$= y\, e^{-yx}$$

Für $x \le 0$ erhalten wir

$$f_{X|Y=y} = \frac{\overbrace{f_{(X,Y)}(x,y)}^{=0 \text{ für } x \le 0}}{f_Y(y)} = 0$$

c) $$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y=y}(x)\,dx$$

b)
$$\int_0^\infty x y e^{-xy}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a x y e^{-xy}\,dx$$

PI
$$= \lim_{a\to\infty} \left[x \cdot (-e^{-xy})\right]_{x=0}^{x=a} - \lim_{a\to\infty} \int_0^a -e^{-xy}\,dx$$

$$= \underbrace{\underbrace{\left(\lim_{a\to\infty} (-a e^{-ya}) + 0\right)}_{=0}}_{=0} + \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-xy}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x=a}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{y}\left(1 - \underbrace{e^{-ay}}_{\xrightarrow[a\to\infty]{} 0}\right) = \frac{1}{y}$$