Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 23. Mai 2023 — Besprechung: 05. Juni 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 6

Aufgabe 23

Seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit

$$P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad P(Y=0) = \frac{1}{4},\, P(Y=1) = \frac{3}{4}.$$

Betrachten Sie die Zufallsvariable $V = XY$. Berechnen Sie

(a) $P(V = 0)$

(b) $P(V \geq 2)$

(c) $F_V(2)$, wobei F_V die Verteilungsfunktion von V ist.

Aufgabe 24

Seien X, Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_c(x,y) = \begin{cases} c(x+y+xy), & 0 < x < 1,\, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: f_c ist nur für $c = \frac{1}{4}$ eine Dichtefunktion.

(b) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X und Y.

(c) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.

(d) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

(e) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(f) Berechnen Sie $\mathrm{Cor}(X, Y)$.

(g) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 25

Seien $Y \sim \text{Exp}(3)$ und $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ mit $\text{Cov}(Y,Z) = 2$ gelte. Weiterhin betrachten wir den 3-dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$, dessen Komponenten durch

$$X_1 := 2Y + Z - 1, \quad X_2 := -Y \quad \text{und} \quad X_3 := 3Z$$

definiert sind. Berechnen Sie den Erwartungswertvektor $\mu_{\mathbf{X}}$ und die Kovarianzmatrix $\text{Cov}(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$.

Aufgabe 26

Sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ ein 2-dimensional normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $E(\mathbf{X}) = 0 \in \mathbb{R}^2$ und der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin seien

$$Y_1 = aX_1 - X_2 \quad \text{und} \quad Y_2 = X_1 + 2X_2$$

für $a \in \mathbb{R}$. Für welche Werte des Parameters a sind die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?